



Faculteit van de Toegepaste Wetenschappen
Vakgroep Elektrische Energietechniek
Laboratorium voor Elektrische Machines en Vermogenselektronica
Vakgroepvoorzitter: Prof. Dr. ir. J. Melkebeek

Magnetische krachtwerking met toepassing op geluid en trillingen in inductiemachines

door

Lieven Vandevelde

Burgerlijk werktuigkundig-elektrotechnisch ingenieur

promotor:

Prof. Dr. ir. J. Melkebeek

Proefschrift voorgelegd aan de Faculteit van de Toegepaste Wetenschappen
van de Universiteit Gent tot het bekomen van de graad van
Doctor in de Toegepaste Wetenschappen

Academiejaar 1996-1997

© Lieven Vandevelde, 1997

Universiteit Gent

Vakgroep Elektrische Energietechniek

Laboratorium voor Elektrische Machines en Vermogenselektronica

Sint-Pietersnieuwstraat 41

B-9000 Gent, België

De auteur geeft de toelating dit werk voor consultatie beschikbaar te stellen en delen van dit werk te kopiëren voor persoonlijk gebruik. Elk ander gebruik valt onder de beperkingen van het auteursrecht, in het bijzonder met betrekking tot de verplichting de bron uitdrukkelijk te vermelden bij het aanhalen van resultaten uit dit werk.

Gent, juni 1997

Overzicht

In dit werk wordt de magnetische krachtwerking en de daaruitvolgende vervorming van magnetische materialen behandeld. Dit wordt verder toegepast voor het bepalen van de magnetische krachtwerking in inductiemachines met het oog op de studie van de trillingen en het geluid van magnetische oorsprong.

In Hoofdstuk 1 worden de verschillende oorzaken van geluid en trillingen bij elektrische machines kort besproken. Meer specifiek worden de verschillende aspecten van de analyse van het geluid en de trillingen van magnetische oorsprong toegelicht. De aandacht gaat hierbij vooral uit naar de trillings- en geluidsproblematiek bij inductiemachines.

Hoofdstuk 2 omvat een theoretische studie van de vervormingen van magnetische materialen. De totale kracht en het totaal moment dat op een magnetisch lichaam uitgeoefend wordt is eenduidig bepaald. Wat de magnetische krachtenverdeling binnen een magnetisch lichaam betreft, worden er in de literatuur uiteenlopende methodes toegepast die niet tot een éénduidige oplossing leiden. In dit hoofdstuk wordt een werkwijze ontwikkeld waarbij men niet a priori streeft naar het bepalen van de magnetische krachtdichtheid, maar wel van de vervorming van magnetisch materiaal. Een magnetische krachtdichtheid is trouwens niet fysisch waarneembaar, in tegenstelling tot de vervorming.

In de voorgestelde methode voor de berekening van de vervorming van gemagnetiseerd materiaal worden de magnetische en de elastische verschijnselen tesamen behandeld. Bij de beschrijving van de magnetische krachtwerking wordt onderscheid gemaakt tussen korte- en langeafstandskrachten. De magnetische langeafstandskracht die op een deel van een magnetisch lichaam inwerkt kan eenduidig bepaald worden op basis van de macroscopische magnetische velden. De korteafstandskrachten van zowel magnetische als mechanische aard worden voorgesteld onder de vorm van een spanning $\bar{\tau}(\bar{n})$, de kracht per oppervlakte-eenheid op een (denkbeeldig) oppervlak met buitennormale \bar{n} . Op basis van de magnetische langeafstandskrachtwerking worden een aantal bewegingsvergelijkingen opgesteld waaraan de spanningen $\bar{\tau}(\bar{n})$ moeten voldoen. Door de specifieke eigenschappen van de magnetische langeafstandskrachten wijken deze vergelijkingen af van de bewegingsvergelijkingen (of evenwichtsvergelijkingen in het statische geval) van de klassieke elasticiteitsleer. De bewegingsvergelijkingen tesamen met de magnetische vergelijkingen (wetten van Maxwell) en de constitutieve wetten, die het verband leveren tussen de verschillende magnetische en elastische grootheden, vormen een stelsel magneto-elastische vergelijkingen. Samen met de magnetische en de mechanische randvoorwaarden laten deze vergelijkingen toe de magnetische velden en de vervormingen (de rek) te berekenen.

Op basis van deze algemene methode wordt verder een werkwijze voorgesteld om de vervorming ten gevolge van enkel de magnetische langeafstandskrachtwerking te berekenen. Hierbij kunnen de

magnetische en de elastische berekeningen ontkoppeld worden. Op basis van de magnetische velden kan eerst de (fictieve) elektromagnetische krachtenverdeling bepaald worden waaruit in een tweede fase de vervormingen kunnen berekend worden.

In Hoofdstuk 3 wordt de voorgestelde methode voor het berekenen van de vervorming van magnetische lichamen ten gevolge van de magnetische langeafstandskrachten toegepast op een inductiemachine met behulp van de eindige-elementenmethode. De bekomen fictieve krachtenverdeling wordt vergeleken met een in de literatuur veel voorkomende methode. Ook de resulterende vervormingen, meer bepaald de radiale en tangentiële vervorming van het statoroppervlak, berekend aan de hand van de twee methodes worden vergeleken.

In Hoofdstuk 4 wordt een tweede berekeningsmethode voor de magnetische krachten in inductiemachines ontwikkeld. Hierbij wordt de stator ingedeeld in sectoren en wordt de krachtenverdeling over de sectoren bepaald, i.p.v. de (fictieve) krachtenverdeling in het materiaal zelf. De berekeningsmethode is volledig ontwikkeld in het frequentie-orde-domein. Dit heeft als voordeel dat men rechtstreeks de frequenties en de ruimtelijke ordes van de magnetische krachtwerking bekomt, zodat men kan nagaan welke frequenties in het geluid en de trillingen van de machine zullen voorkomen en welke hun oorzaak is.

Voor de modellering van de inductiemachine wordt gebruik gemaakt van een magnetisch netwerk gekoppeld met een elektrisch netwerk. De beschrijving van het stator- en rotorblik aan de hand van discrete reluctanties en van de luchtpleet door middel van permeanties alsook het elektrisch netwerk van de stator (voor verschillende types statorwikkelingen) en van de rotor worden in dit hoofdstuk uitvoerig behandeld. Bij het opstellen van het machinemodel worden de verschillende factoren die van belang zijn voor productie van geluid en trillingen in rekening gebracht, zoals gleueffect, statische en dynamische excentriciteit verzaadiging en harmonischen van de aangelegde spanning (in geval van invertorvoeding). Ook eventuele asflux is in het model opgenomen. Na de berekening van de magnetische velden in de machine kunnen de verschillende componenten van de magnetische langeafstandskrachten op de statorsectoren berekend worden op basis van het principe van de virtuele arbeid.

In Hoofdstuk 5 wordt deze berekeningsmethode experimenteel geverifieerd. Daartoe werden enerzijds metingen van de tandfluxen in een inductiemachine verricht om deze te vergelijken met de berekende fluxen zowel wat hun frequenties en ordes, als hun amplitudes betreft. Verder worden de berekende magnetische krachten vergeleken met opgemeten frequentiespectra van het geluid en de trillingen van een inductiemachine, om na te gaan in hoeverre de belangrijkste frequenties van het geluid en de trillingen af te leiden zijn uit de berekende magnetische krachten.

Tot slot worden in Hoofdstuk 6 de besluiten uit dit werk geformuleerd. Tevens worden de mogelijkheden tot verder onderzoek aangehaald. De modellering van de magnetische krachtwerking in inductiemachines kan immers gekoppeld worden aan een mechanische modellering om uiteindelijk tot een coherent model voor het bepalen van de trillingen en het geluid van magnetische oorsprong te komen.

voor Ann en Lise

Dankwoord

In de eerste plaats wens ik Prof. Dr. ir. J. Melkebeek, promotor van dit proefschrift, te bedanken voor de steun tijdens het onderzoek. Bij het schrijven van deze tekst heb ik steeds beroep kunnen doen op zijn aanwijzingen, waarvoor ik hem in het bijzonder wil danken.

Verder gaat mijn dank uit naar alle medewerkers van het Laboratorium voor Elektrische Machines en Vermogenselektronica. In het bijzonder wil ik ir. J. Gyselinck bedanken voor zijn hulp bij de eindige-elementenberekeningen. Voor praktische hulp bij de metingen kon ik steeds rekenen op dhr. C. Vervust, waarvoor dank.

Het onderzoek werd onder meer mogelijk gemaakt door de financiële steun van het Nationaal Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek.

Tenslotte wens ik mijn vrouw Ann te bedanken voor haar niet aflatende steun.

Inhoudsopgave

Overzicht	i
Dankwoord	iii
Inhoud	v
Voorwoord	ix
Symbolenlijst	xi
1 Inleiding tot geluid en trillingen bij elektrische machines	1-1
1.1 Bronnen van geluid en trillingen bij elektrische machines	1-1
1.1.1 Magnetisch geluid	1-1
1.1.2 Aërodynamisch geluid	1-3
1.1.3 Mechanisch geluid	1-4
1.2 Magnetisch geluid	1-4
1.2.1 Magnetische velden	1-5
1.2.2 Mechanische trillingen	1-6
1.2.3 Geluidsafstraling	1-7
1.3 Geluid en trillingen van magnetische oorsprong bij inductiemachines	1-8
1.4 Doelstelling	1-9
2 Vervorming van gemagnetiseerd materiaal	2-1
2.1 Inleiding	2-1
2.2 Magnetische krachtwerking op basis van magnetisatiemodellen	2-2
2.2.1 Inleiding	2-2

2.2.2	Chu- en Ampère-model	2-2
2.2.3	Krachtwerking op dipolen	2-5
2.2.4	Kracht op magnetische bronnen	2-7
2.2.5	Besluit	2-8
2.3	Kracht op een deel van een magnetisch lichaam - veralgemeende spanning van Maxwell	2-8
2.3.1	Inleiding	2-8
2.3.2	Kracht en moment van de magnetische langeafstandskrachtwerking op een deel van een magnetisch lichaam	2-8
2.3.3	De elektromagnetische spanning $\bar{\sigma}_{em}$ - fysische betekenis en eigenschappen .	2-14
2.4	Spanningen in gemagnetiseerd materiaal	2-17
2.5	Arbeid en energie in elastisch gemagnetiseerd materiaal	2-21
2.5.1	Arbeid en magnetische energie in niet-bewegende middenstoffen	2-21
2.5.2	Beschrijving van bewegende middenstoffen	2-28
2.5.3	Arbeid en energie in bewegend gemagnetiseerd materiaal	2-29
2.5.4	Inwendige energie en constitutieve wetten in elastisch gemagnetiseerd materiaal	2-34
2.5.5	Magneto-elastische vergelijkingen in de Chu-formulering	2-40
2.5.6	Magneto-elastische vergelijkingen in de Ampère-formulering - Equivalentie met de Chu-formulering	2-42
2.5.7	De fictieve elektromagnetische kracht- en koppeldichtheid \bar{f}_{em} en \bar{c}_{em}	2-49
2.5.8	Vervorming ten gevolge van magnetische langeafstandskrachten	2-51
2.6	Uitdrukkingen van de magnetische krachtenverdeling uit de literatuur	2-53
2.7	Besluit	2-58
3	Berekening van de magnetische krachtenverdeling en de vervorming in induc- tiemachines met behulp van de eindige-elementenmethode	3-1
3.1	Berekeningsmethodes	3-1
3.2	De eindige-elementenmethode	3-3
3.3	Resultaten	3-4
3.4	Besluit	3-14
4	Magnetische krachten in inductiemachines - berekeningsmethode met behulp van een netwerkmodel	4-1
4.1	Inleiding	4-1

4.2	Gekoppeld magnetisch-elektrisch netwerkmodel in het frequentie-orde-domein	4-3
4.3	Magnetisch netwerk	4-8
4.3.1	Ontbinding van de grootheden in componenten	4-8
4.3.2	Bepaling van de reluctanties en permeanties	4-12
4.3.3	Flux-potentiaal-vergelijkingen voor reluctanties en permeanties in het frequentie-orde-domein	4-13
4.3.4	Modellering van de luchtspleet	4-15
4.3.5	M.m.k.-bronnen	4-27
4.3.6	Magnetische netwerkvergelijkingen	4-27
4.4	Elektrisch netwerk	4-34
4.4.1	Statorwikkeling	4-35
4.4.2	Rotorkooi	4-51
4.5	Koppeling van de magnetische en de elektrische netwerkvergelijkingen	4-54
4.6	Magnetische langeafstandskrachtwerking	4-56
4.6.1	Principe van de virtuele arbeid toegepast op een magnetisch netwerkmodel	4-56
4.6.2	Toepassing op de magnetische krachtwerking in inductiemachines	4-63
4.7	Pulsaties en ordes	4-70
4.8	Vergelijking met andere berekeningsmethodes	4-76
4.9	Besluit	4-77
5	Experimentele verificatie van de berekeningsmethode	5-1
5.1	Inleiding	5-1
5.2	Vergelijking van berekende en opgemeten statortandfluxen	5-1
5.2.1	Beschrijving van de meetopstelling	5-1
5.2.2	Resultaten	5-4
5.3	Vergelijking van opgemeten frequentiespectra met de berekende krachtcomponenten	5-10
5.3.1	Resultaten voor inductiemachine 1	5-10
5.3.2	Resultaten voor inductiemachine 2	5-13
5.4	Besluit	5-16
6	Slotbeschouwingen	6-1

Appendices

A	Magnetische kracht- en koppeldichtheden en spanningen op randoppervlakken	A-1
A.1	Chu-model	A-2
A.1.1	Krachtwerking op dipolen	A-2
A.1.2	Krachtwerking op magnetische lading	A-4
A.2	Ampère-model	A-5
A.2.1	Krachtwerking op dipolen	A-5
A.2.2	Krachtwerking op magnetiseringsstroom	A-6
A.3	Overzicht	A-7
B	Contractie van tensoren	B-1
C	Principe van de virtuele arbeid	C-1
D	Magnetische energie	D-1
E	Elastische energiedichtheid van gemagnetiseerd materiaal	E-1
F	Spanningsvergelijkingen	F-1
F.1	Parallelschakeling met equipotentiaalverbindingen	F-1
F.2	Parallelschakeling zonder equipotentiaalverbindingen	F-5
F.3	Serieschakeling	F-6
G	Stroom en gekoppelde flux versus m.m.k.-bron en fysische flux	G-1
	Referenties	R-1

Voorwoord

Elektrische machines zijn in onze samenleving alom tegenwoordig, in de huiskamer, op kantoor, in de industrie en vormen één van de factoren die bijdragen tot ons comfort. Onze hoogtechnologische samenleving kent daarentegen een hoge belasting van ons leefmilieu, onder verschillende vormen zoals lucht- en waterverontreiniging en ook geluidspollutie. Het aspect van geluid en trillingen speelt dan ook een belangrijke rol bij het ontwerp van elektrische machines.

De geluids- en trillingenproblematiek is bij het ontwerp van elektrische aandrijvingen zeker niet eenvoudiger geworden. Ten eerste is er een tendens naar een kleiner volume per vermogeneenheid, en dus naar een hogere elektrische, magnetische en mechanische belasting. Dit leidt tot hogere waarden voor de magnetische inductie, en dus tot verzadiging, tot dunnere machineframes, tot hogere koelingsvereisten, enz. Ten tweede is er het toenemend gebruik van vermogenselektronische omvormers. Deze factoren versterken onvermijdelijk de problemen op gebied van geluid en trillingen.

Een belangrijke oorzaak van geluid en trillingen bij elektrische machines is de magnetische krachtwerking. Door de pulserende magnetische krachten die in de machine optreden ontstaan er trillingen die zich verder buiten de machine kunnen voortplanten. De trilling van het buitenoppervlak van de machine veroorzaakt verder geluidsafstraling.

Wat de magnetische krachtwerking betreft moet men onderscheid maken tussen de totale kracht en het totaal moment die op een gemagnetiseerd lichaam inwerken enerzijds en de 'krachtenverdeling' en de hierdoor veroorzaakte vervorming van gemagnetiseerd materiaal anderzijds.

De totale kracht en het totaal moment kunnen éénduidig bepaald worden aan de hand van bijvoorbeeld de spanningen van Maxwell of het principe van de virtuele arbeid. Men kan ook gebruik maken van verschillende uitdrukkingen in de vorm van een magnetische krachtdichtheid aan de hand waarvan men door integratie over het beschouwde lichaam de totale kracht en het totaal moment kan berekenen. Deze krachtdichtheden hebben echter geen lokale betekenis, m.a.w. ze kunnen niet geïnterpreteerd worden als de werkelijke magnetische krachtdichtheid (kracht per volume-eenheid), zodat we ze enkel als fictieve krachtdichtheden kunnen bestempelen.

De verschillende methodes voor het bepalen van de totale krachtwerking zijn alle equivalent. De integralen van de fictieve krachtdichtheden over het volume van het beschouwde lichaam kunnen immers omgevormd worden tot oppervlakte-integralen van de Maxwellspanningen over een oppervlak dat het volledig magnetisch lichaam omsluit. Ook de equivalentie tussen de Maxwell-spanningen en het principe van de virtuele arbeid kan eenvoudig aangetoond worden.

Voor de berekening van de magnetische krachtenverdeling daarentegen, worden in de literatuur verschillende werkwijzen voorgesteld die niet equivalent zijn. Ze steunen immers meestal op een lokale toepassing van de methodes voor de bepaling van de totale krachtwerking en missen een solide

wetenschappelijke basis. De aldus bekomen krachtverdelingen kunnen sterk van elkaar verschillen, maar worden in de literatuur toch als een werkelijke krachtdichtheid beschouwd.

Voor de bepaling van de magnetische krachtwerking in elektrische machines met het oog op de analyse van trillingen en geluid, volstaat het niet de totale kracht en het totaal moment (het koppel) op bijvoorbeeld de stator of de rotor van de machine te kunnen berekenen, maar is er nood aan een degelijk gefundeerde werkwijze voor het beschrijven van de krachtenverdeling in de machine.

Het voorgestelde onderzoek is enerzijds gericht op het formuleren van een algemene werkwijze voor het berekenen van de vervorming van gemagnetiseerd materiaal. Omdat hierbij zowel magnetische als mechanische (elastische) verschijnselen optreden worden deze tesamen behandeld om tot een consistente theorie i.v.m. magnetische krachtwerking en vervorming te komen.

Anderzijds is het onderzoek gericht op de toepassing van de voorgestelde methode voor de numerieke bepaling van de magnetische krachtwerking in inductiemachines voor de studie van de productie van geluid en trillingen van magnetische oorsprong.

De magnetische krachtwerking en de daaruitvolgende trillingen en geluidsafstraling in inductiemachines is een complex probleem. Er zijn immers verschillende factoren die het frequentiespectrum van het geproduceerde geluid en van de trillingen bepalen, met name de harmonischen van de uitgangsspanning van de vermogenselektronische voeding, de combinatie van het aantal stator- en rotorplekken, excentriciteit van de rotor en verzadiging. Bij de meeste analyses en berekeningsmethodes van het magnetisch veld en de exciterende magnetische krachten die in de literatuur worden voorgesteld, worden meestal slechts één of enkele van deze factoren in rekening gebracht. Nochtans blijkt dat bij bepaalde inductiemachines wel degelijk de verschillende factoren terzelfdertijd moeten in rekening gebracht worden om het waargenomen frequentiespectrum van het geproduceerde geluid te kunnen verklaren. Bovendien wordt voor de magnetische veldberekening veelvuldig beroep gedaan op een sterk benaderende berekeningsmethode zoals de draaiveldtheorie. Ook wat betreft de interactie van het magnetische en het elektrische systeem worden doorgaans een aantal vereenvoudigingen doorgevoerd. Dit houdt in dat men bij de berekening van de stator- en rotorstromen geen rekening houdt met bepaalde componenten van de magnetische inductie die nochtans spanningen in de stator- en rotorwikkeling induceren, zodat de demping van deze fluxcomponenten niet, of niet volledig, wordt beschouwd.

In dit werk wordt een berekeningsmethode voorgesteld dat een antwoord biedt op de hierboven vermelde opmerkingen i.v.m. de berekeningsmethodes uit de literatuur. In het tijdens het onderzoek ontwikkelde mathematisch model van de inductiemachine worden de verschillende factoren die van belang zijn voor de geluids- en trillingsproductie opgenomen. Door het gebruik van een magnetisch netwerkmodel gekoppeld met een elektrisch netwerk wordt een nauwkeurigheid beoogd die hoger is dan met bijvoorbeeld de draaiveldtheorie kan verwacht worden. Bovendien zijn de magnetische en elektrische netwerken direct en volledig met elkaar gekoppeld zodat het dempend effect van de geïnduceerde stator- en rotorstromen wordt in rekening gebracht.

Samenvattend kunnen we stellen dat dit werk een bijdrage poogt te leveren tot enerzijds de theorie van de magnetische krachtwerking en vervorming in gemagnetiseerd materiaal en anderzijds tot de analyse en de berekening van de magnetische krachtwerking in inductiemachines in verband met de productie van geluid en trillingen.

Symbolenlijst

\bar{a}	versnelling (m/s ²)
\bar{A}	magnetische vectorpotentiaal (Tm)
\bar{B}	magnetische inductie (T)
\bar{c}	koppeldichtheid (koppel per volume-eenheid) (N/m ²)
\bar{C}	koppel (Nm)
\bar{E}	elasticiteitstensor (N/m ²)
E	geïnduceerde spanning (V)
\bar{f}	(fictieve) krachtdichtheid (kracht per volume-eenheid) (N/m ³)
f_0	fundamentele voedingsfrequentie axiale (Hz)
\bar{F}	kracht (N)
\mathcal{G}	magnetische permeantie (Wb/A)
\mathcal{F}	magnetomotorische kracht (m.m.k.) (A)
\bar{H}	magnetische veldsterkte (A/m)
I	stroom (A)
\bar{I}	eenheidstensor
$j = \sqrt{-1}$	imaginaire eenheid
\bar{J}	vrije stroomdichtheid (A/m ²)
\bar{J}_m	magnetiseringsstroomdichtheid (A/m ²)
k_s	reductiefactor bij schuingestelde gleuven
l_a	axiale lengte (m)
\bar{L}	moment (Nm)
L_σ	spreidingsinductantie (H)
\bar{M}	magnetisatiedichtheid (A/m)
\bar{M}_s	magnetisch moment per massa-eenheid (Am ² /kg)
N_p	aantal poolparen
N_r	aantal rotorgleuven
N_s	aantal statorgleuven
q	aantal gleuven per pool en per fase
Q	gedissipeerde energie (J)
\bar{r}	plaatsvector (m)
R	straal van de luchtspleet (m)
R_s, R_r	stator- en rotorweerstand (Ω)
\mathcal{R}	reluctantie (A/Wb)
$\Re()$	reëel deel

t_s	statortandsteek
\bar{T}	(fictieve) spanning op randoppervlakken (N/m ²)
$\bar{\bar{T}}$	spanningstensor (N/m ²)
\bar{u}	verplaatsing (m)
u_{inw}	inwendige energiedichtheid (J/kg)
U	scalaire potentiaal (A)
U_{inw}	inwendige energie (J)
V	spanning (V)
w	aantal windingen per elementaire spoelgroep
W_e	arbeid geleverd door de spanningsbronnen (J)
W_m	arbeid opgenomen door het magnetisch materiaal (J)
W_z	magnetische zelfenergie (J)
$W_{0 \rightarrow 1}$	arbeid geleverd door de bronnen buiten V_1 bij een wijziging van de magnetisatie binnen V_1 (J)
$\alpha_s = \frac{2\pi}{N_s}$	mechanische hoek tussen twee statorgleuven
$\alpha_r = \frac{2\pi}{N_r}$	mechanische hoek tussen twee rotorgleuven
γ_s	verhouding statortandbreedte tot statortandsteek
γ_r	verhouding rotortandbreedte tot rotortandsteek
δ	luchtspleetlengte (m)
$\bar{\bar{\epsilon}}$	rektensor
$\bar{\theta}$	rotatie (-)
κ	ruimtelijke orde (bij discrete systemen)
λ_s	permeantie van het statoroppervlak (-)
λ_r	permeantie van het rotoroppervlak (-)
λ_{ls}	permeantie van de luchtspleet (H/m ²)
Λ_s, Λ_r	gleuffactoren (-)
μ_0	magnetische permeabiliteit van vacuüm (H/m)
ν	ruimtelijke orde (bij continue systemen)
$\bar{\xi}_v$	spoedverkortingsfactor
ξ_z	zonefactor
ρ	massadichtheid (kg/m ³)
ρ_m	magnetische ladingsdichtheid (Wb/m ³)
$\bar{\sigma}_{em}$	de elektromagnetische spanning voor het bepalen van de magnetische langeafstandskracht (N/m ²)
$\bar{\tau}(\bar{n})$	spanningsvector op een oppervlak met buitennormale \bar{n} (N/m ²)
$\bar{\bar{\tau}}$	spanningstensor (N/m ²)
$\bar{\bar{\tau}}^s$	symmetrisch deel van de spanningstensor $\bar{\bar{\tau}}$ (N/m ²)
$\bar{\bar{\tau}}^{as}$	antisymmetrisch deel van de spanningstensor $\bar{\bar{\tau}}$ (N/m ²)
Φ	flux in de netwerkelementen (Wb)
Ψ	gekoppelde flux (Wb)
ω	pulsatie (rad/s)
ω_0	fundamentele pulsatie (rad/s)
Ω	hoeksnelheid van de rotor (rad/s)

indices a en a' grootheden afgeleid van het Ampère-model

indices c en c' grootheden afgeleid van het Chu-model

Hoofdstuk 1

Inleiding tot geluid en trillingen bij elektrische machines

Dit inleidend hoofdstuk geeft een kort overzicht van de verschillende bronnen van geluid en trillingen bij elektrische machines. Verder worden de verschillende aspecten bij de analyse van het geluid en de trillingen van meer bepaald magnetische oorsprong besproken. De aandacht gaat hierbij vooral uit naar inductiemachines.

1.1 Bronnen van geluid en trillingen bij elektrische machines

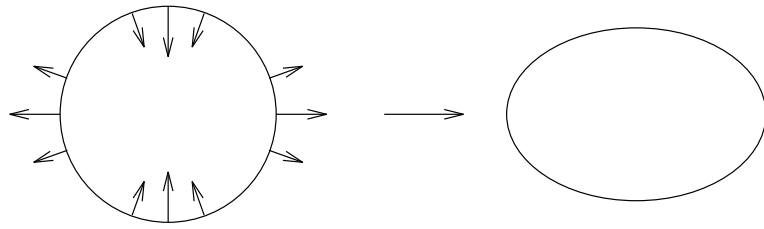
Het geluid van elektrische machines kan opgesplitst worden in drie categorieën naargelang de aard van de exciterende krachten, nl. magnetische, aërodynamische en mechanische. Hierna volgt een korte kwalitatieve beschrijving van de verschillende geluidsbronnen. Voor een verder bespreking van de geluidsbronnen bij inductiemachines kunnen we bijvoorbeeld verwijzen naar [Finley 91].

1.1.1 Magnetisch geluid

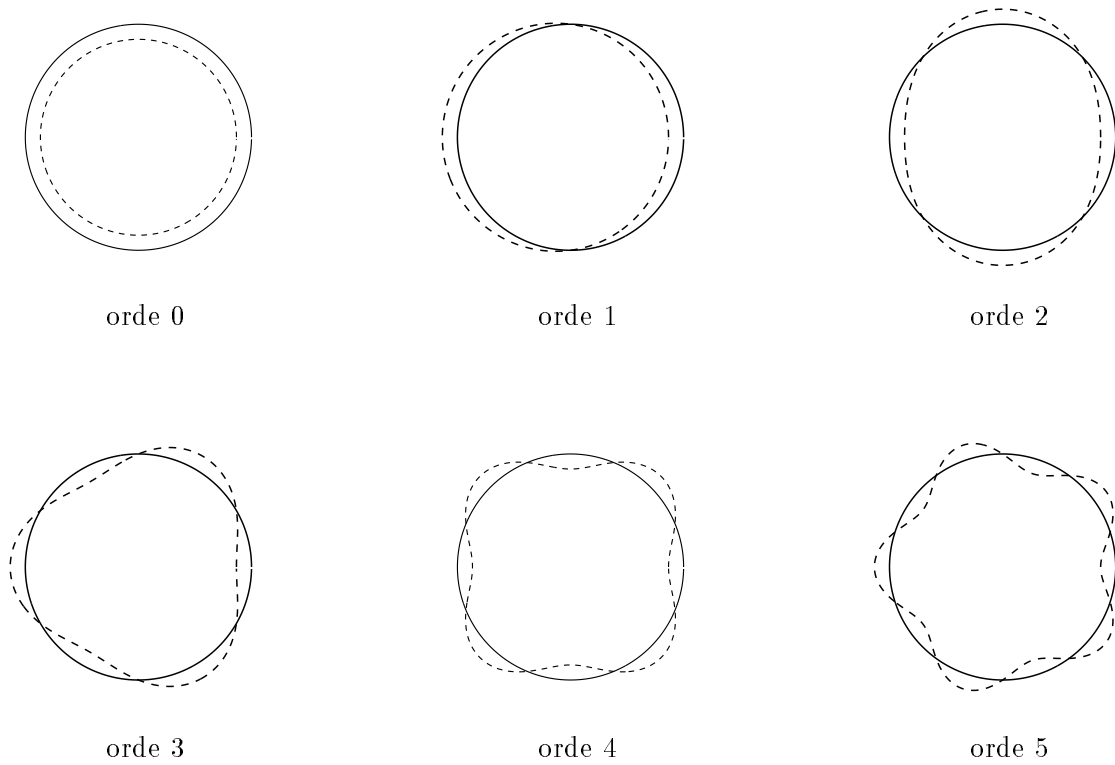
Het magnetisch geluid wordt veroorzaakt door de magnetische krachten die op de machine inwerken. We kunnen deze krachten in drie klassen onderbrengen:

1. Radiale krachten

De magnetische flux die de luchtspleet oversteekt veroorzaakt een radiale aantrekkingskracht tussen de stator en de rotor, die als het ware de luchtspleet, m.a.w. de magnetische weerstand, tracht te verkleinen. Om de gedachten te vestigen kunnen we de stator van een elektrische machine beschouwen als een cilinder en de radiale krachten die erop uitgeoefend worden als een reeks lopende krachtgolven met verschillende frequenties en ordes (modes). De orde is hierbij het aantal maxima (of minima) van de golf over de omtrek van de machine. Deze krachtgolven veroorzaken corresponderende radiale pulserende vervormingen (trillingen) van het statorhuis die gepaard gaan met geluidsafstraling. Figuur 1.1 toont bijvoorbeeld de radiale vervorming door een krachtgolf van tweede orde.



Figuur 1.1: Vervorming door radiale krachtgolf van tweede orde

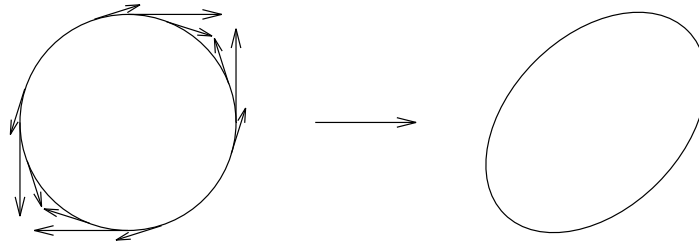


Figuur 1.2: Vervormingsmodes

Figuur 1.2 toont de radiale vervormingsmodes 0 tot 5. De respons van de stator op een exciterende krachtgolf hangt af van de frequentie en de orde. Een krachtgolf van een bepaalde orde en met een frequentie in de buurt van de eigenfrequentie van de stator voor die orde geeft aanleiding tot een grote geluidsproductie.

Voor kleinere machines zijn enkel de ordes 1, 2, 3 en 4 van belang. Voor grotere machines kunnen ook hogere ordes een rol spelen. In het algemeen spelen krachtengolven en vervormingen met orde 2 een dominante rol bij de geluidsproductie. Orde 1 is een speciaal geval, de resultante van de krachten over de omtrek is hier immers niet nul zoals bij de andere ordes. Stator en rotor oefenen hierbij dus een netto kracht op elkaar uit. Radiale krachten van orde 1 staan dus in nauw verband met radiale trillingen en excentriciteit van de rotor [Belmans 84].

2. Tangentiale krachten



Figuur 1.3: Vervorming door tangentiale krachten (orde 2)

De tangentiale magnetische krachten produceren niet alleen het nuttig koppel van de machine maar ook tangentiale trillingen van het statorhuis en pulserende koppels.

Tangentiale krachten kunnen ook bijdragen tot de geluidsproductie, zij het in mindere mate dan de radiale krachten. Ze veroorzaken immers ook radiale trillingen van het statorhuis (Figuur 1.3).

Tangentiale krachten van nulde orde vormen een speciaal geval. Ze corresponderen namelijk met pulserende koppels, die niet alleen statortrillingen veroorzaken maar ook een reactiekracht die de fundering exciteert. Pulserende koppels kunnen enerzijds veroorzaakt worden door de elektrische machine zelf, m.a.w. als, bij constante rotorsnelheid, het elektromagnetisch koppel van de motor een rimpel vertoont. Anderzijds kunnen pulserende koppels te wijten zijn aan de last. Deze zouden dan ook onder de geluidsbronnen van mechanische oorsprong (zie verder) kunnen gerekend worden. Voor de analyse van dit probleem moet men dus rekening houden met pulserende elektromagnetische koppels, pulserende lastkoppels, snelheidsvariaties, enz. .

3. Axiale krachten

Axiale krachten komen voor bij machines met schuingestelde gleuven en moeten worden opgevangen door de lagers. Hun belang is voor de geluidsproductie zeer gering.

1.1.2 Aërodynamisch geluid

Het aërodynamisch geluid wordt veroorzaakt door de interactie van de koellucht met de machine. Dit geluid vertoont enkele duidelijke discrete frequenties (sirene-effect) die te wijten zijn aan draaiende onderdelen zoals de ventilatorschoepen. Daarnaast is er ook een breedbandig geluid dat ontstaat door willekeurige drukgolven in de turbulente luchtstroming.

De discrete frequenties van het aërodynamisch geluid kunnen eenvoudig worden bepaald. Bij *gesloten motoren*, waarbij een externe ventilator koellucht blaast over de koelvinnen, is er geen uitwisseling is van interne en externe lucht. Het intern geproduceerde geluid heeft hier bijgevolg weinig belang. De discrete geluidsfrequenties zijn enkel te wijten aan de ventilator:

$$f_v = \frac{N_v n_v}{60} \text{ Hz}$$

waarbij f_v : doorgangsfrequentie van de ventilatorschoepen
 n_v : draaisnelheid van de ventilator (r/min)
 N_v : aantal ventilatorschoepen

Bij *open motoren* is er vrije uitwisseling van interne en externe lucht. Door de luchtstroming door de stator- en rotorkoelkanalen ontstaan de volgende geluidsfrequenties (sirene-effect):

$$f_r = \frac{N_r n_r}{60} \text{ Hz}$$

waarbij f_r : doorgangsfrequentie van de rotorgleuven
 n_r : rotorsnelheid (r/min)
 N_r : aantal rotorgleuven

Deze frequenties zijn in het algemeen veel hoger dan de frequentie f_v van de ventilator en meer irriterend voor het menselijk oor.

1.1.3 Mechanisch geluid

Als geluidsbronnen van zuiver mechanische oorsprong kunnen we de lagers en de wrijving van borstels over de sleepringen of over de collector vermelden. Ook een onbalans van de rotor kan als een geluidsbron van mechanische oorsprong beschouwd worden. Een onbalans geeft immers aanleiding tot dynamische excentriciteit en radiale trillingen van de rotor. Door de excentrische rotorpositie ontstaat dan weer een radiale magnetische kracht die de excentriciteit nog tracht te vergroten. Onbalans en excentriciteit van de rotor vormen dus een gekoppeld mechanisch-elektromagnetisch probleem, net zoals de pulserende lastkoppels, zoals reeds vermeld.

1.2 Magnetisch geluid

Bij de analyse en de numerieke bepaling van het magnetisch geluid opgewekt door een elektrische machine kan men in het algemeen de volgende vier aspecten onderscheiden die in de volgende paragrafen verder worden toegelicht:

1. Magnetische velden.
Vooreerst wordt een elektromagnetisch model van de machine opgebouwd voor de berekening van het magnetisch veld.
2. Magnetische krachten.
Op basis van het magnetisch veld wordt de magnetische krachtenverdeling in de machine bepaald.
3. Mechanisch gedrag.
Door toepassing van de mechanische vergelijkingen (wetten van Newton) kan men de mechanische trillingen opgewekt door de magnetische krachtwerking berekenen. De studie van het mechanisch gedrag van elektrische machines beperkt zich echter dikwijls tot de bepaling van de eigenfrequenties (resonantie).
4. Geluidsafstraling.
Op basis van de trillingen van het statoroppervlak kan het afgestraalde geluid berekend worden.

In de meeste gevallen worden de verschillende aspecten afzonderlijk behandeld. De magnetische veldberekeningen gebeuren bijvoorbeeld in de onvervormde toestand, wat aanvaardbaar is gezien de relatief kleine vervormingen.

1.2.1 Magnetische velden

Voor de berekening van het magnetisch veld in een elektrische machine kan men beroep doen op numerieke methodes, zoals de eindige-elementenmethode. Deze methode werd reeds op verschillende machinetypes (inductiemachine, synchrone machine, permanent magneetmotor, geschakelde reluctantiemotor, enz.) toegepast. Een dynamische eindige-elementensimulatie in het tijdsdomein (time-stepping) vraagt in het algemeen echter een grote rekentijd. Voor de verdere studie van de mechanische trillingen en de geluidsproductie is men echter niet zozeer geïnteresseerd in het tijdsverloop van de magnetische velden en de daardoor veroorzaakte krachten, maar wel in het frequentiespectrum van de magnetische krachten. Zoals in Hoofdstuk 4 verder wordt besproken, kan het aantal tijdsstappen dat nodig is om de verschillende frequenties die in de machine voorkomen en die van belang zijn voor de productie van geluid en trillingen hoog oplopen, wat uiteraard resulteert in een grote rekentijd.

Het magnetisch veld in draaiveldmachines kan ook analytisch bepaald worden aan de hand van de draaiveldtheorie. Hierbij kunnen de verschillende effecten die van belang zijn voor de geluidsproductie in rekening worden gebracht, zoals spanningsharmonischen bij invertorvoeding, m.m.k.-harmonischen, gleufharmonischen van stator en rotor, eventuele rotorexcentriciteit en verzadiging. Een voordeel van de draaiveldtheorie is dat de modellering van een machine in het frequentiedomein gebeurt, zodat men direct de verschillende frequentiecomponenten van de magnetische velden en krachten (en dus van het geproduceerde geluid) bekomt en men dus het frequentiespectrum van het geluid en de trillingen kan voorspellen. Uiteraard moet men bij het gebruik van de draaiveldtheorie een aantal benaderingen en veronderstellingen invoeren, vooral in verband met de geometrie en de verzadigingstoestand van de motor, zodat men bij de kwantitatieve bepaling van de velden en de krachten geen grote nauwkeurigheid kan verwachten.

1.2.1.1 Magnetische krachten

De berekening van de kracht en het moment die door de magnetische krachtwerking inwerken op een lichaam, stelt - zeker vanuit theoretisch oogpunt - weinig problemen. Zo kunnen bijvoorbeeld de kracht en het koppel uitgeoefend op de rotor van een elektrische machine bepaald worden door integratie van de spanningen van Maxwell in de luchtspleet of door toepassing van het principe van de virtuele arbeid. In principe zijn deze methodes equivalent; verschillen in resultaten zijn enkel te wijten aan de numerieke implementatie.

Voor de analyse van trillingen dient echter niet enkel de totale kracht maar ook de magnetische krachtenverdeling te worden bepaald. Voor het berekenen van lokale magnetische krachten treft men in de literatuur uiteenlopende methodes aan, die echter niet equivalent zijn, d.i. verschillende krachtenverdelingen opleveren. Voor de bepaling van de magnetische krachtenverdeling met behulp van de eindige-elementenmethode doet men meestal beroep op methodes die steunen op een zgn. lokale toepassing van de Maxwellspanningen of van het principe van de virtuele arbeid, hoewel beide methodes in principe enkel gelden voor de berekening van het totale kracht en het totaal moment die op een lichaam inwerken.

Ook bij de draaiveldtheorie worden de krachten bepaald d.m.v. een lokale toepassing van de Maxwellspanningen. De magnetische krachtwerking wordt hierbij voorgesteld door middel van krachtgolven die inwerken op het binnenoppervlak van de stator en die bepaald worden op basis van het luchtspleetveld door toepassing van de Maxwellspanningen in de luchtspleet. De radiale kracht per oppervlakte-eenheid σ_r die inwerkt op de stator is dan evenredig met het kwadraat van het luchtspleetveld B :

$$\sigma_r = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (1.1)$$

De magnetische krachtwerking en de daaruitvolgende vervorming van gemagnetiseerd materiaal in het algemeen en de krachtwerking in inductiemachines in het bijzonder worden in de volgende hoofdstukken uitgebreid behandeld.

1.2.2 Mechanische trillingen

De trilling van de machine kan beschreven worden aan de hand van een aantal vrijheidsgraden, nl. de verplaatsing in n punten, bijvoorbeeld de knopen van een eindige-elementenvermazing. De bewegingsvergelijkingen van het mechanisch systeem kunnen algemeen geschreven worden als :

$$[M] \frac{d^2}{dt^2} \{x(t)\} + [C] \frac{d}{dt} \{x(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (1.2)$$

waarbij

- $[M]$: de massamatrix
- $[C]$: de dempingsmatrix
- $[K]$: de stijfheidsmatrix
- $\{x(t)\}$: de vector van de vrijheidsgraden (verplaatsingsvector)
- $\{f(t)\}$: de vector van de krachten aangrijpend in de punten

Het corresponderend ongedempt homogeen stelsel vergelijkingen leidt tot een eigenwaardenprobleem, dat de (genormaliseerde) eigenvectoren $\{\Psi\}_i$ en de corresponderende eigenwaarden $\lambda_i = \omega_i^2$ (met ω_i de ongedempte eigenfrequentie van de i^{de} mode) oplevert. Door overgang op hoofdcoördinaten (of modale coördinaten) $\{q(t)\}$ volgens

$$\{x(t)\} = [\Psi] \{q(t)\} \quad (1.3)$$

met $[\Psi]$ de modale matrix bestaande uit de eigenvectoren $\{\Psi\}_i$, bekomen we het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$[M_q] \frac{d^2}{dt^2} \{q(t)\} + [C_q] \frac{d}{dt} \{q(t)\} + [K_q] \{q(t)\} = \{h(t)\} \quad (1.4)$$

waarbij

- $[M_q]$: de hoofdmassamatrix
- $[C_q]$: de hoofddempingsmatrix
- $[K_q]$: de hoofdstijfheidsmatrix
- $\{q(t)\}$: de vector van de hoofdcoördinaten
- $\{h(t)\} = [\Psi]^T \{f(t)\}$: de vector van de veralgemeende krachten

De hoofdmassamatrix $[M_q]$ en de hoofdstijfheidsmatrix $[K_q]$ zijn diagonaalmatrices. De enige koppeling tussen de verschillende modes gebeurt dus via de dempingsmatrix $[C_q]$, die over het algemeen geen diagonaalmatrix is. Men kan dus een ontkoppeld systeem bekomen als men de niet-diagonaalelementen van $[C_q]$ verwaarloost. Een speciaal geval van ontkoppeling treedt op bij zgn. proportionele demping, d.i. als de dempingsmatrix kan geschreven worden als een lineaire combinatie van de massamatrix en de stijfheidsmatrix:

$$[C_q] = a[M_q] + b[K_q] \quad (1.5)$$

Bij een ontkoppeld systeem bekomen we voor elke mode i een differentiaalvergelijking van de volgende vorm:

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} q_i(t) + c_i \frac{d}{dt} q_i(t) + k_i q_i(t) = h_i(t) \quad (1.6)$$

of in het frequentiedomein:

$$(-\omega^2 m_i + j\omega c_i + k_i) q_i(j\omega) = h_i(j\omega) \quad (1.7)$$

Modale analyse biedt dus de mogelijkheid de trillingen volgens de verschillende modes afzonderlijk te berekenen om dan door superpositie het globaal trillingspatroon te bekomen.

Deze modale techniek toegepast met behulp van de eindige-elementenmethode stelt ons in principe in staat de trillingen opgewekt door de magnetische krachten nauwkeurig te berekenen. Het grootste probleem bij de opbouw van het mechanisch model is de modale demping c_i , die enkel experimenteel kan bepaald worden. Meestal wordt de modale analyse dan ook enkel toegepast voor het bepalen van de eigenmodes en de eigenfrequenties [Benbouzid 93]. In [Verdyck 93, Javadi 95] wordt de modale analyse ook effectief gebruikt voor het berekenen van de trillingen.

Naast deze numerieke aanpak kan men het probleem ook analytisch benaderen [Jordan 50, Ellison 71b, Yang 81, Finley 91]. Men kan bijvoorbeeld de stator van een elektrische machine als een massieve cilinder beschouwen die aan de binnenzijde belast wordt met magnetische spanninggolven. Het probleem bij het opstellen van analytische uitdrukkingen ligt bij het modelleren van de statortanden, de statorwikkelingen, het frame (meestal met koelvinnen) en de gelamelleerde structuur van de statorkern, enz.. Deze aspecten hebben uiteraard invloed op de eigenfrequenties en de demping van de stator [Benbouzid 93, Girgis 79, Watanabe 83].

1.2.3 Geluidsafstraling

Voor de berekening van het geluidsveld rond een elektrische machine kan men gebruik maken van analytische uitdrukkingen. Hierbij wordt het statoroppervlak sterk vereenvoudigd tot bijvoorbeeld een gladde cilinder [Yang 81] of tot een sferisch model [Jordan 50]. Meer geavanceerde analytische akoestische modellen van elektrische machines worden bijvoorbeeld behandeld in [Zhu 94].

Wat de numerieke bepaling van het geluidsveld betreft, kan men beroep doen op de randelementenmethode. Bij de vergelijking van het berekende en het opgemeten geluidsveld kunnen zeer grote afwijkingen voorkomen zowel wat betreft het totaal afgestraald akoestisch vermogen als het ruimtelijk patroon van het geluidsveld. Dit kan te wijten zijn aan de vereenvoudiging van het statoroppervlak, aan een onnauwkeurige kennis van het trillingspatroon, enz. .

1.3 Geluid en trillingen van magnetische oorsprong bij inductiemachines

Voor de analyse van het geluid en de trillingen van magnetische oorsprong bij inductiemachines moet men rekening houden met verschillende factoren die invloed hebben op het frequentiespectrum en de intensiteit van het geluid en de trillingen. Zoals reeds vermeld kunnen we voor het bepalen van de frequenties van de exciterende magnetische krachten beroep doen op de draaiveldtheorie. Hierbij wordt het luchtspleetveld in functie van de tijd t en van de hoekcoördinaat θ beschreven door middel van een reeks loopgolven met verschillende frequenties f_k en ordes ν_k :

$$B(\theta, t) = \sum_k \Re \left(\bar{B}_k e^{j(2\pi f_k t - \nu_k \theta)} \right) \quad (1.8)$$

Deze loopgolven worden bekomen door het vermenigvuldigen van de m.m.k.-golven, die de stroomverdeling in stator en rotor weergeven, met de permeantiegolven aan de hand waarvan het gleufeffect, rotorexcentriciteit en verzadiging in rekening kunnen worden gebracht. De magnetische krachtwerking wordt beschreven aan de hand van de Maxwellspanningen in de luchtspleet wat een reeks radiale krachtgolven oplevert:

$$\sigma_r(\theta, t) = \frac{B^2(\theta, t)}{2\mu_0} \quad (1.9)$$

$$= \sum_l \Re \left(\bar{\sigma}_l e^{j(2\pi f_l t - \nu_l \theta)} \right) \quad (1.10)$$

De frequenties en ordes van het luchtspleetveld en dus van de krachtgolven worden bepaald door de volgende factoren:

- de harmonischen van de aangelegde spanning in geval van invertorvoeding
- de m.m.k.-harmonischen van de stator- en rotorwikkeling
- het gegleufd zijn van stator en rotor (gleufeffect)
- statische en dynamische excentriciteit van de rotor
- verzadiging

Bij invertorvoeding worden de frequenties van het geluid mede bepaald door het frequentiespectrum van de uitgangsspanning van de invertor. De analyse van het geproduceerde geluid bij invertorvoeding wordt bijvoorbeeld behandeld in [Belmans 87], [Belmans 91], [Bolte 90], [Wallace 90] en [Yacamini 95]. Het gaat hierbij in hoofdzaak om kwalitatieve studies, d.i. het bepalen van de frequenties van de exciterende magnetische krachten op basis van het frequentiespectrum van de invertorspanning. Eventueel wordt deze analyse van het frequentiespectrum van de exciterende krachten gekoppeld met een mechanische analyse om na te gaan welke frequenties van de krachten in de buurt liggen van een eigenfrequentie van de machine en dus een hoge geluidsproductie kunnen veroorzaken, cf. [Belmans 91].

Verder kan men op basis van de analyses van het geluid van invertorgevoede machines PWM-technieken trachten te ontwikkelen om het geproduceerde geluid te beperken zoals bijvoorbeeld voorgesteld in [Takahashi 86], [Habetler 91] en [Ueda 91].

De m.m.k.-harmonischen en het gleueffect vormen een andere belangrijke factor. Van groot belang hierbij is de combinatie van het aantal stator- en rotorpleuven, in het bijzonder wat betreft de ordes van de krachtgolven die hiermee overeenkomen. Bij bepaalde combinaties van de stator- en rotorpleuven ontstaan er immers krachtgolven met een lage orde (bv. orde 2), die een dominante rol spelen bij de geluidsproductie. De keuze van de combinatie van het aantal stator- en rotorpleuven in verband met de geluidsproductie wordt bijvoorbeeld behandeld in [Jordan 50], [Binns 78] en [Binns 80]. Wat de numerieke bepaling van het gleueffect betreft, zijn er verschillende methodes beschreven, bijvoorbeeld in [Binns 64], [Bolte 84], [Hesse 92] [Gerling 94].

Verder kunnen ook statische en dynamische rotoexcentriciteit een voorname rol spelen. Hierbij is tevens het type statorwikkeling van belang. Bij parallelschakeling van de statorwikkelingen van de verschillende polen worden de velden die ontstaan door excentriciteit gedempt [Ellison 71a, DeBortoli 93]. In het bijzonder bij tweepolige machines ontstaat er door excentriciteit een eenzijdige magnetische trekkracht op de rotor wat een radiale rotortrilling veroorzaakt [Belmans 84].

Tenslotte veroorzaakt ook verzadiging een reeks harmonische velden in de machine en moet dus eveneens in rekening gebracht worden bij het bepalen van de frequenties en de ordes van de krachtgolven.

We merken op dat in de literatuur dikwijls één factor bij de geluidsproductie apart wordt behandeld, bij voorbeeld de invloed van de spanningsharmonischen of de invloed van excentriciteit, waarbij de andere factoren niet beschouwd worden. In vele gevallen echter kan het frequentiespectrum slechts verklaard worden indien de verschillende factoren die de magnetische krachten bepalen tegelijkertijd in rekening worden gebracht.

1.4 Doelstelling

Zoals uit dit inleidend hoofdstuk blijkt, is de productie van geluid en trillingen bij elektrische machines een complex probleem dat uit vele facetten bestaat. In dit werk zullen we ons beperken tot één deelaspect, met name de magnetische krachtwerking.

Dit onderwerp wordt vanuit verschillende invalshoeken benaderd. Vooreerst wordt de fysische achtergrond van de magnetische krachtwerking theoretisch behandeld. Nadien worden de resultaten van dit onderzoek toegepast voor de bepaling van krachtwerking in inductiemachines, specifiek in verband met de productie van geluid en trillingen.

Hoofdstuk 2

Vervorming van gemagnetiseerd materiaal

2.1 Inleiding

Als fundamentele basis voor de studie van geluid en trillingen van elektromagnetische oorsprong bij elektrische machines, dient een model voor de vervormingen van gemagnetiseerd materiaal opgesteld te worden. Vervorming van materiaal bij magnetisering wordt algemeen als *magnetostrictie* bestempeld, waarbij men onderscheid maakt tussen enerzijds vervormingen te wijten aan veranderingen van de interne structuur (op microscopisch niveau) en vervormingen door magnetische krachten (macroscopische krachtenverdeling).

Bij ferromagnetische materialen spelen de vervormingen door microscopische structuurveranderingen slechts een belangrijke rol bij zeer hoge inductieniveau's. Bij elektrische machines waar het magnetisch werkingpunt gelegen is in het begin van verzadiging of lager, kan men in eerste instantie deze 'zuivere' magnetostrictie verwaarlozen ten opzichte van de vervormingen door magnetische krachten [Reyne 87].

Wat de magnetische krachtenverdelingen betreft, zijn er in de literatuur verschillende benaderingen terug te vinden, die echter niet equivalent zijn, m.a.w. die tot verschillende krachtenverdelingen leiden. Een algemene consensus over het berekenen van magnetische krachtenverdelingen bestaat dus niet. De verschillende krachtenverdelingen resulteren echter wel in dezelfde totale kracht en hetzelfde totaal moment die op een magnetisch lichaam inwerken. Voor het berekenen van deze totale krachtwerking, komen de verschillende methodes immers neer op het integreren van de Maxwellspanningen over een contour die het lichaam volledig omsluit. Een equivalente berekeningsmethode wordt bekomen door toepassing van het principe van de virtuele arbeid. De Maxwellspanningen kunnen trouwens afgeleid worden m.b.v. het principe van de virtuele arbeid. Het ligt bijgevolg voor de hand om dit principe van de virtuele arbeid ook toe te passen voor het berekenen van niet alleen de totale krachten en momenten maar ook van de krachtenverdeling. Hierbij neemt men aan dat de totale energiedichtheid bestaat uit enerzijds de magnetostatische energiedichtheid, zonder hierbij vervorming in rekening te brengen, en anderzijds de elastische energie waarbij de magnetisatie van het materiaal niet beschouwd wordt. De magnetische krachtenverdeling (krachtdichtheid) wordt hierbij berekend door middel van een lokale toepassing van het principe van de virtuele arbeid, uit-

gaande van de magnetostatische energie. Op basis van deze magnetische krachtdichtheid wordt dan met behulp van de elasticiteitsleer de vervorming bepaald, waarbij enkel de elastische energie een rol speelt. Aan deze werkwijze kan vervolgens, enigzins kunstmatig, een interactie tussen magnetische en elastische verschijnselen toegevoegd worden, bijvoorbeeld door de magnetische permeabiliteit μ afhankelijk te maken van de massadichtheid ρ .

In dit hoofdstuk wordt een alternatieve aanpak ontwikkeld waarbij de magnetische en elastische verschijnselen tesamen worden behandeld. In tegenstelling tot de hierboven aangehaalde werkwijze wordt hier niet a priori getracht een magnetische krachtdichtheid af te leiden. Er zal zelfs blijken dat een macroscopische krachtdichtheid (in de strikte zin van kracht per volume-eenheid) eigenlijk niet bestaat. De waarneembare grootte is trouwens niet de magnetische krachtenverdeling, maar wel de resulterende vervorming.

Bij de behandeling van de vervorming van gemagnetiseerd materiaal gaan we uit van een macroscopische beschrijving van het magnetisch materiaal. Voor een microscopische behandeling van magnetostrictie kunnen we bijvoorbeeld naar [Chikazumi 64] verwijzen.

2.2 Magnetische krachtwerking op basis van magnetisatiemodellen

2.2.1 Inleiding

Om tot een macroscopische beschrijving van magnetische velden in magnetische middenstoffen te komen gaat men uit van de 'vrije' ruimte, d.w.z. de ruimte met enkel de vrije stroomdichtheid \bar{J} als bron van magnetische velden. In deze vrije ruimte wordt dan magnetisch materiaal toegevoegd, onder de vorm van een magnetisch moment per volume-eenheid $\mu_0 \bar{M}$. Deze magnetisatie van de middenstoffen kan worden gemodelleerd door extra bronnen aan de vrije ruimte toe te voegen. Men kan dus trachten de magnetische krachtenverdeling te bepalen op basis van de kracht op magnetische momenten of op basis van de kracht op deze bronnen die de magnetisatie weergeven. De bekomen krachtenverdelingen blijken echter afhankelijk te zijn van het gebruikte model om de magnetisatie weer te geven. Het zijn slechts fictieve krachtenverdelingen die echter wel nuttig te zijn om de totale krachten en momenten die op magnetische lichamen inwerken te bepalen.

Als referentie bij de hier volgende beschrijving van magnetisch materiaal en verder bij de bepaling van de totale kracht en het totaal moment die inwerken op een magnetisch lichaam vermelden we [Pauwels].

2.2.2 Chu- en Ampère-model

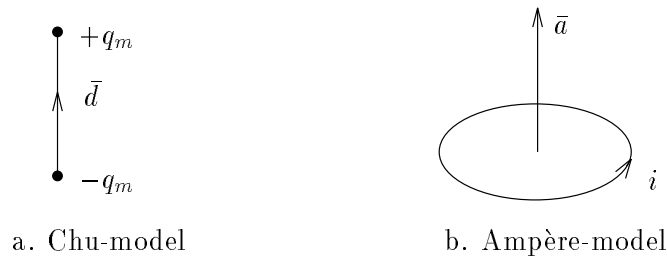
De vrije ruimte, die, zoals in de inleiding vermeld, als uitgangspunt dient, wordt beheerst door de volgende wetten ¹:

$$\bar{\nabla} \cdot (\mu_0 \bar{H}) = \bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0 \quad (2.1)$$

$$\bar{\nabla} \times \frac{\bar{B}}{\mu_0} = \bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J} \quad (2.2)$$

$$\bar{B} = \mu_0 \bar{H} \quad (2.3)$$

Voor het weergeven van magnetische middenstoffen kan men uitgaan van verschillende modellen voor een elementaire magnetische dipool met moment \bar{m} .



Figuur 2.1: Voorstelling van een magnetische dipool

2.2.2.1 Chu-model

In het Chu-model wordt een dipool voorgesteld als twee tegengestelde magnetische ladingen q_m en $-q_m$ van elkaar verwijderd over een afstand \bar{d} , zoals weergegeven in Figuur 2.1.a, wat resulteert in een magnetisch moment \bar{m} gegeven door:

$$\bar{m} = q_m \bar{d} \quad (2.4)$$

Een macroscopische beschrijving van de magnetisatie bekomt men dan door het definiëren van een magnetisatiedichtheid \bar{M} waarbij $\mu_0 \bar{M}$ het magnetisch moment per volume-eenheid voorstelt. Deze magnetisatiedichtheid \bar{M} wordt in het Chu-model gemodelleerd aan de hand van de magnetische ladingsdichtheid ϱ_m gegeven door:

$$\varrho_m = -\bar{\nabla} \cdot \mu_0 \bar{M} \quad (2.5)$$

die als extra bron aan de vrije ruimte toegevoegd wordt. Het aldus bekomen veld is de magnetische veldsterkte \bar{H} die bepaald wordt door:

$$\bar{\nabla} \cdot \mu_0 \bar{H} = \varrho_m = -\bar{\nabla} \cdot \mu_0 \bar{M} \quad (2.6)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J} \quad (2.7)$$

Als we de magnetische inductie \bar{B} definiëren als:

$$\bar{B} = \mu_0 (\bar{H} + \bar{M}) \quad (2.8)$$

kan vergelijking (2.6) omgevormd worden tot de bekende vorm:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0 \quad (2.9)$$

¹In het algemeen geval dient het rechterlid van (2.2) aangevuld te worden tot: $\bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$. Hier worden steeds de quasi-stationaire vergelijkingen beschouwd, waarbij het magnetisch en elektrisch veldsysteem ontkoppeld zijn.

In de Chu-formulering is als het ware de magnetische veldsterkte \vec{H} het fundamentele veld terwijl de inductie \vec{B} eerder een hulpgrootte is.

2.2.2.2 Ampère-model

Een andere voorstelling van een elementaire magnetische dipool wordt gegeven door het Ampère-model. Hierbij wordt een dipool voorgesteld als een elementaire stroomkring, zoals weergegeven in Figuur 2.1.b, met magnetisch moment:

$$\vec{m} = \mu_0 i \vec{a} \quad (2.10)$$

Een macroscopische beschrijving van magnetische middenstoffen bekomt men door het toevoegen van de magnetiseringsstroomdichtheid \vec{J}_m gegeven door

$$\vec{J}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (2.11)$$

als bron in de vrije ruimte.

Het aldus bekomen veld, ditmaal de magnetische inductie \vec{B} , wordt bepaald door :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.12)$$

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J} + \vec{J}_m = \vec{J} + \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (2.13)$$

Mits de magnetische veldsterkte \vec{H} te definiëren als

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (2.14)$$

wordt vergelijking (2.13) herleid tot

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (2.15)$$

Bij het Ampère-model kunnen we de magnetische inductie \vec{B} als het fundamentele veld en de magnetische veldsterkte \vec{H} als een hulpgrootte bestempelen.

2.2.2.3 Besluit

Beide modellen leiden tot dezelfde macroscopische beschrijving van het magnetisch veldsysteem nl. :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.16)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (2.17)$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (2.18)$$

In de volgende paragrafen wordt nagegaan of beide modellen eveneens tot eenzelfde magnetische krachtwerking aanleiding geven, uitgaande van de krachtwerking op elementaire dipolen of op de magnetische bronnen.

2.2.3 Krachtwerking op dipolen

Men beschouwt nu een dipool met magnetisch moment \bar{m} die men in de vrije ruimte plaatst.

Volgens het Chu-model, uitgaande van de kracht op magnetische lading, gegeven door

$$\bar{F}_q = q_m \bar{H} , \quad (2.19)$$

worden de kracht en het koppel die op deze dipool inwerken gegeven door:

$$\bar{F}_c = (\bar{m} \cdot \bar{\nabla}) \bar{H} \quad (2.20)$$

$$\bar{C}_c = \bar{m} \times \bar{H} . \quad (2.21)$$

Op basis van de kracht op stroom ($\bar{J} \times \bar{B}$) bekomt men de kracht en het koppel op een dipool van het Ampère-model:

$$\bar{F}_a = \frac{1}{\mu_0} (\bar{\nabla} \bar{B}) \cdot \bar{m} \quad (2.22)$$

$$\bar{C}_a = \frac{1}{\mu_0} \bar{m} \times \bar{B} \quad (2.23)$$

Indien de dipool zich in een ruimte zonder bronnen bevindt ($\bar{J}=0$ ter hoogte van de dipool), dan zijn de krachten en koppels volgens het Chu-model (2.20 en 2.21) en volgens het Ampère-model (2.22 en 2.23) identiek. Inderdaad uit de veldvergelijkingen in de vrije ruimte zonder bronnen

$$\bar{B} = \mu_0 \bar{H} \quad \text{en} \quad \bar{J} = \bar{\nabla} \times \bar{H} = 0$$

volgt:

$$\begin{aligned} \bar{F}_a - \bar{F}_c &= \frac{1}{\mu_0} (\bar{\nabla} \bar{B}) \cdot \bar{m} - (\bar{m} \cdot \bar{\nabla}) \bar{H} \\ &= (\bar{\nabla} \bar{H}) \cdot \bar{m} - (\bar{m} \cdot \bar{\nabla}) \bar{H} \\ &= \bar{m} \times (\bar{\nabla} \times \bar{H}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

en

$$\begin{aligned} \bar{C}_a - \bar{C}_c &= \frac{1}{\mu_0} \bar{m} \times \bar{B} - \bar{m} \times \bar{H} \\ &= 0 . \end{aligned} \quad (2.25)$$

De krachtwerkingen op een dipool volgens het Chu- en volgens het Ampère-model zijn dus equivalent als de andere bronnen vanuit microscopisch oogpunt ver verwijderd zijn zodat de dipool zich in een vrije ruimte zonder bronnen bevindt.

Als in de uitdrukkingen voor de kracht en het koppel op een dipool het magnetisch moment \bar{m} vervangen wordt door het magnetisch moment per volume-eenheid $\mu_0\bar{M}$ bekomt men een kracht en koppel per volume-eenheid of m.a.w. een kracht- en koppeldichtheid. Bij deze overgang van discrete dipolen naar een macroscopische magnetisatiedichtheid \bar{M} , bevinden de dipolen zich uiteraard niet meer in een vrije ruimte zonder bronnen, noch kunnen de dipolen als onderling ver verwijderd worden beschouwd. De bekomen kracht- en koppeldichtheden zijn dus enkel fictief. Ze worden hier toch vermeld, enerzijds om aan te tonen dat de equivalentie van het Chu- en Ampère-model bij deze werkwijze verloren gaat en anderzijds omdat de bekomen uitdrukkingen, zoals verder zal blijken, wel nuttig zijn voor het berekenen van totale krachten en momenten op magnetische lichamen.

Als men dus in (2.20) en (2.21) \bar{m} vervangt door $\mu_0\bar{M}$ en hieraan de krachtdichtheid op de vrije stromen \bar{J} toevoegt, vindt men de (fictieve) kracht- en koppeldichtheid volgens het Chu-model:

$$\bar{f}_c = \bar{J} \times \mu_0\bar{H} + (\mu_0\bar{M} \cdot \bar{\nabla}) \bar{H} \quad (2.26)$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \left(\bar{B}\bar{H} - \frac{\mu_0}{2}H^2\bar{I} \right) \quad (2.27)$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \bar{T}_c \quad (2.28)$$

$$\bar{c}_c = \mu_0\bar{M} \times \bar{H} \quad (2.29)$$

Op analoge wijze worden de (fictieve) kracht- en koppeldichtheid volgens het Ampère-model afgeleid:

$$\bar{f}_a = \bar{J} \times \bar{B} + \bar{\nabla}\bar{B} \cdot \bar{M} \quad (2.30)$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \left(\bar{B}\bar{H} - \left(\frac{\mu_0}{2}H^2 - \frac{\mu_0}{2}M^2 \right) \bar{I} \right) \quad (2.31)$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \bar{T}_a \quad (2.32)$$

$$\bar{c}_a = \bar{M} \times \bar{B} \quad (2.33)$$

Voor de omvorming van de krachtdichtheden (2.26) en (2.30) naar de respectievelijke tensorformuleringen (2.27) en (2.31) verwijzen we naar appendix A.

Uit (2.27) en (2.31) blijkt dat de krachtdichtheden voor de twee modellen met een term $\bar{\nabla} \cdot \frac{\mu_0}{2}M^2\bar{I}$ verschillen. De koppeldichtheden blijken wel overeen te stemmen, immers

$$\bar{c}_a - \bar{c}_c = \bar{M} \times \bar{B} - \mu_0\bar{M} \times \bar{H} = \mu_0\bar{M} \times \bar{M} = 0 \quad (2.34)$$

We merken tenslotte op dat de fictieve krachtdichtheden \bar{f}_c en \bar{f}_a een singulariteit vertonen ter hoogte van een scheidingsoppervlak tussen twee verschillende materialen wegens de discontinuïteit van respectievelijk \bar{H} en \bar{B} . In het bijzonder voor het randoppervlak van een magnetisch materiaal, i.e. het scheidingsoppervlak met een niet-magnetisch materiaal ($\bar{M} = 0$), resulteert dit in de volgende (fictieve) spanningen, die in Appendix A worden afgeleid:

$$\bar{T}_c(\bar{n}) = \frac{\mu_0}{2}M_n^2\bar{n} \quad (2.35)$$

en

$$\bar{T}_a(\bar{n}) = -\frac{\mu_0}{2}M_t^2\bar{n} \quad (2.36)$$

2.2.4 Kracht op magnetische bronnen

In plaats van de kracht op de dipolen als basis te nemen, wordt nu de kracht op de bronnen die de magnetisatie voorstellen beschouwd.

In het Chu-model is dit de magnetische ladingsdichtheid ϱ_m , waarop de volgende kracht- en koppeldichtheid inwerken:

$$\bar{f} = \varrho_m\bar{H} \quad (2.37)$$

$$\bar{c} = 0 \quad (2.38)$$

Als hieraan terug de kracht op de vrije stromen wordt toegevoegd, resulteert dit in de volgende fictieve kracht- en koppeldichtheid (zie Appendix A) :

$$\bar{f}_{c'} = \bar{J} \times \mu_0\bar{H} + \varrho_m\bar{H} \quad (2.39)$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \left(\mu_0\bar{H}\bar{H} - \frac{\mu_0}{2}H^2\bar{I} \right) \quad (2.40)$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \bar{T}_{c'} \quad (2.41)$$

$$\bar{c}_{c'} = 0 \quad (2.42)$$

wat correspondeert met de volgende fictieve spanning op randoppervlakken:

$$\bar{T}_{c'}(\bar{n}) = \bar{n} \cdot \mu_0\bar{M}\bar{H} + \frac{\mu_0}{2}M_n^2\bar{n} \quad (2.43)$$

In het Ampère-model wordt de krachtwerking op de magnetisatiestroomdichtheid \bar{J}_m en op de vrije stroomdichtheid \bar{J} gegeven door (zie Appendix A) :

$$\bar{f}_{a'} = \bar{J} \times \bar{B} + \bar{J}_m \times \bar{B} \quad (2.44)$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\bar{\nabla} \cdot \left(\bar{B}\bar{B} - \frac{1}{2}B^2\bar{I} \right) \quad (2.45)$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \bar{T}_{a'} \quad (2.46)$$

$$\bar{c}_{a'} = 0 \quad (2.47)$$

en de spanning op randoppervlakken:

$$\bar{T}_{a'}(\bar{n}) = (\bar{B} \cdot \bar{M})\bar{n} - \bar{n} \cdot (\bar{B}\bar{M}) - \frac{\mu_0}{2}M_t^2\bar{n} \quad (2.48)$$

2.2.5 Besluit

Op basis van de twee beschouwde magnetisatiemodellen kan men vier verschillende fictieve kracht- en koppeldichtheden afleiden, enerzijds afhankelijk van het model (Chu of Ampère), en anderzijds afhankelijk van het uitgangspunt, nl. de kracht op een elementaire dipool (index c en a) of de kracht op de bronnen die de magnetisatie voorstellen (index c' en a').

De vier kracht- en koppeldichtheden zijn echter verschillend. Het is dus onwaarschijnlijk dat deze aanpak leidt tot het bepalen van de 'ware' kracht- en koppelverdeling.

2.3 Kracht op een deel van een magnetisch lichaam - veralgemeende spanning van Maxwell

2.3.1 Inleiding

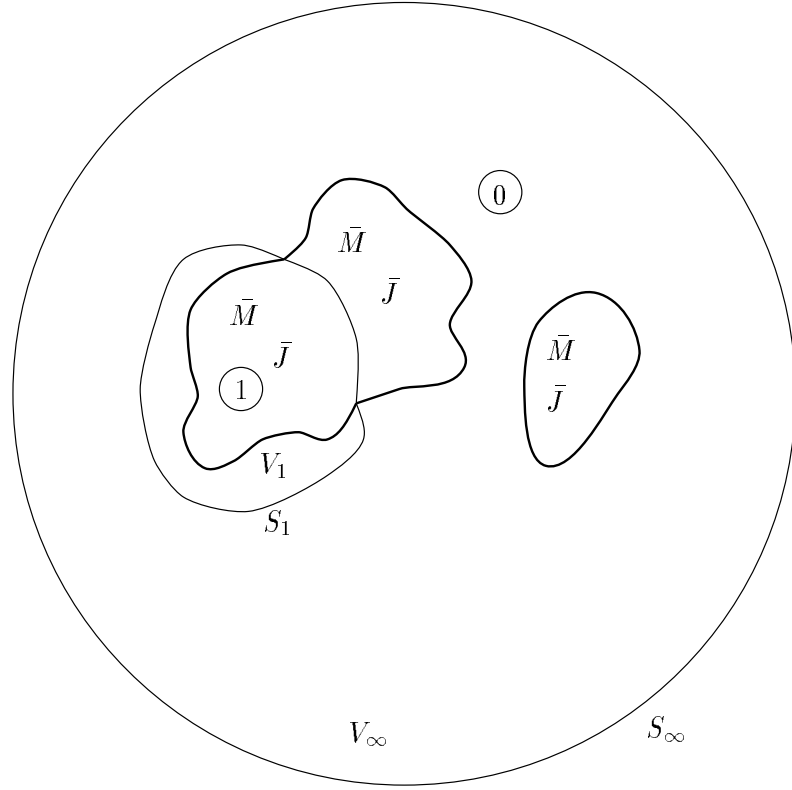
Uit de vorige paragraaf is gebleken dat de kracht op een dipool slechts eenduidig bepaald is, d.w.z. onafhankelijk is van het dipoolmodel, als de andere bronnen - microscopisch gezien - ver verwijderd zijn. Daarom wordt de magnetische krachtwerking nu opgesplitst in 'langeafstandskrachten' en 'korteafstandskrachten'. Om deze begrippen nader te omschrijven, beschouwt men de ruimte waarvan een deel V_1 afgezonderd wordt, zoals voorgesteld in Figuur 2.2. De langeafstandskracht op V_1 is de kracht die de bronnen buiten V_1 op het gemagnetiseerd materiaal en de stromen in V_1 uitoefenen, waarbij de bronnen buiten V_1 op microscopische schaal als ver verwijderd van V_1 beschouwd worden. Zij V_0 het volume dat alle bronnen buiten V_1 bevat, dan is voor de berekening van de langeafstandskracht op V_1 als het ware een microscopische snede aangebracht tussen V_1 en V_0 , zoals voorgesteld in Figuur 2.3. Of omgekeerd, men verwijderd V_1 en V_0 van elkaar, en beschouwt dan de limietsituatie waarbij de afstand tussen beide naar nul gaat. Deze definitie van magnetische langeafstandskrachten wordt bijvoorbeeld ook gehanteerd in [Brown 53, Brown 66].

2.3.2 Kracht en moment van de magnetische langeafstandskrachtwerking op een deel van een magnetisch lichaam

Na het aanbrengen van de 'snede' ontstaat er een discontinuïteit van de velden ter hoogte van het oppervlak S_1 . Daarom worden nu twee oppervlakken beschouwd: ten eerste, het oppervlak S_1^+ dat in de snede, en dus net buiten het oppervlak S_1 gelegen is en dat het volume V_1^+ omvat en ten tweede een oppervlak S_1^- dat net binnen S_1 ligt en het volume V_1^- omsluit. De grootheden ter hoogte van S_1^- (m.a.w. in het materiaal) zijn dezelfde als die ter hoogte van S_1 vóór het aanbrengen van de snede. De integralen over het oppervlak S_1^- en het hierdoor omsloten volume V_1^- van Figuur 2.3 kunnen bijgevolg vervangen worden door integralen over respectievelijk S_1 en V_1 van Figuur 2.2.

De magnetische langeafstandskracht op V_1 kan men nu berekenen op basis van de krachten op elementaire dipolen. Daartoe wordt de magnetische veldsterkte \vec{H} opgedeeld in \vec{H}_0 en \vec{H}_1 opgewekt door de bronnen respectievelijk buiten en binnen V_1 .

Wegens het actie-reactie-principe is de totale kracht en het totaal moment dat de bronnen binnen V_1 op elkaar uitoefenen nul. Enkel \vec{H}_0 , de magnetische veldsterkte opgewekt door de bronnen



Figuur 2.2: Indeling van het magnetisch materiaal

buiten V_1 , levert dus een bijdrage tot de totale kracht en moment. \bar{H}_0 voldoet binnen V_1 aan de veldvergelijkingen van de vrije ruimte zonder bronnen. De kracht en het koppel op een dipool binnen V_1 te wijten aan het veld \bar{H}_0 zijn dus eenduidig bepaald en leiden tot de volgende kracht- en koppeldichtheden die voor het Chu- en Ampère-model identiek zijn, zoals hoger reeds aangetoond:

$$\bar{f}_0 = \bar{J} \times \mu_0 \bar{H}_0 + (\mu_0 \bar{M} \cdot \bar{\nabla}) \bar{H}_0 = \bar{J} \times \bar{B}_0 + \bar{\nabla} \bar{B}_0 \cdot \bar{M} \quad (2.49)$$

$$\bar{c}_0 = \mu_0 \bar{M} \times \bar{H} = \bar{M} \times \bar{B} \quad (2.50)$$

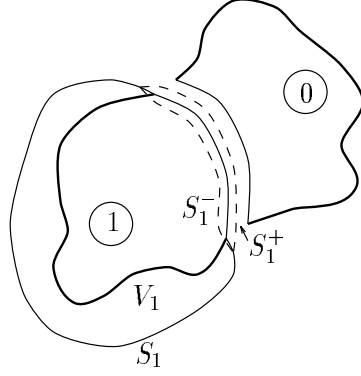
Voor de verdere redenering wordt enkel de Chu-formulering neergeschreven.

De kracht en het moment uitgeoefend op V_1 worden dus gegeven door:

$$\bar{F}_0 = \int_{V_1} [\bar{J} \times \mu_0 \bar{H}_0 + (\mu_0 \bar{M} \cdot \bar{\nabla}) \bar{H}_0] dv \quad (2.51)$$

$$\bar{L}_0 = \int_{V_1} \{ \bar{r} \times [\bar{J} \times \mu_0 \bar{H}_0 + (\mu_0 \bar{M} \cdot \bar{\nabla}) \bar{H}_0] + \mu_0 \bar{M} \times \bar{H}_0 \} dv \quad (2.52)$$

Beschouwen we nu de ruimte met enkel de bronnen binnen V_1 en het \bar{H}_1 -veld dat door deze bronnen wordt opgewekt. Men kan aantonen dat de 'kracht' \bar{F}_1 en het 'moment' \bar{L}_1 op V_1 berekend



Figuur 2.3: De 'snede' tussen V_1 en V_0

aan de hand van de fictieve krachtdichtheid \bar{f}_c (2.26) en koppeldichtheid \bar{c}_c (2.29) in dit geval beide nul zijn:

$$\begin{aligned}\bar{F}_1 &= \int_{V_1^+} [\bar{J} \times \mu_0 \bar{H}_1 + (\mu_0 \bar{M} \cdot \bar{\nabla}) \bar{H}_1] dv \\ &= 0\end{aligned}\tag{2.53}$$

$$\bar{L}_1 = \int_{V_1^+} \{ \bar{r} \times [\bar{J} \times \mu_0 \bar{H}_1 + (\mu_0 \bar{M} \cdot \bar{\nabla}) \bar{H}_1] + \mu_0 \bar{M} \times \bar{H}_1 \} dv\tag{2.54}$$

$$= 0\tag{2.55}$$

Inderdaad, uit de tensorformulering (2.27) volgt dat:

$$\bar{F}_1 = \int_{V_1^+} \bar{\nabla} \cdot \left(\bar{B}_1 \bar{H}_1 - \frac{\mu_0}{2} H_1^2 \bar{I} \right) dv\tag{2.56}$$

$$= \oint_S \bar{n} \cdot \left(\bar{B}_1 \bar{H}_1 - \frac{\mu_0}{2} H_1^2 \bar{I} \right) ds\tag{2.57}$$

waarbij S een willekeurig oppervlak is dat V_1 omsluit. Laat men nu S naar het oppervlak op oneindig naderen, dan verminderen de velden (minstens) volgens r^{-2} terwijl het oppervlak volgens r^2 toeneemt, waaruit kan besloten worden dat $\bar{F}_1 = 0$. Uit een analoge redenering volgt eveneens dat $\bar{L}_1 = 0$.

Als men nu de krachten \bar{F}_0 en \bar{F}_1 en de momenten \bar{L}_0 en \bar{L}_1 samentelt bekomt men uitdrukkingen voor de kracht en het moment op V_1 in functie van het totale \bar{H} -veld:

$$\bar{F} = \bar{F}_0 + \bar{F}_1\tag{2.58}$$

$$= \int_{V_1^+} [\bar{J} \times \mu_0 \bar{H} + (\mu_0 \bar{M} \cdot \bar{\nabla}) \bar{H}] dv\tag{2.59}$$

$$= \int_{V_1^+} \bar{f}_c \, dv \quad (2.60)$$

en

$$\bar{L} = \bar{L}_0 + \bar{L}_1 \quad (2.61)$$

$$= \int_{V_1^+} \{ \bar{r} \times [\bar{J} \times \mu_0 \bar{H} + (\mu_0 \bar{M} \cdot \bar{\nabla}) \bar{H}] + \mu_0 \bar{M} \times \bar{H} \} \, dv \quad (2.62)$$

$$= \int_{V_1^+} (\bar{r} \times \bar{f}_c + \bar{c}_c) \, dv \quad (2.63)$$

Door het aanbrengen van de snede wordt de fictieve krachtdichtheid \bar{f}_c singulier ter hoogte van S_1 . Dit leidt tot een extra spanning op het oppervlak S_1 , nl. de spanning op randoppervlakken corresponderend met \bar{f}_c die gegeven wordt door:

$$\bar{T}_c(\bar{n}) = \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n} \quad (2.64)$$

zodat \bar{F} en \bar{L} als volgt kunnen omgevormd worden tot integralen over het oorspronkelijk volume V_1 en oppervlak S_1 van Figuur 2.2 (m.a.w. vóór het invoeren van de discontinuïteiten en singulariteiten):

$$\bar{F} = \int_{V_1^+} [\bar{J} \times \mu_0 \bar{H} + (\mu_0 \bar{M} \cdot \bar{\nabla}) \bar{H}] \, dv \quad (2.65)$$

$$= \int_{V_1^-} [\bar{J} \times \mu_0 \bar{H} + (\mu_0 \bar{M} \cdot \bar{\nabla}) \bar{H}] \, dv + \oint_{S_1^-} \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n} \, ds \quad (2.66)$$

$$= \int_{V_1} \bar{f}_c \, dv + \oint_{S_1} \bar{T}_c(\bar{n}) \, ds \quad (2.67)$$

$$= \oint_{S_1} \left[\bar{n} \cdot \left(\bar{B} \bar{H} - \frac{\mu_0}{2} \bar{H}^2 \bar{I} \right) + \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n} \right] \, ds \quad (2.68)$$

$$= \oint_{S_1} \left[\bar{n} \cdot \bar{T}_c + \bar{T}_c(\bar{n}) \right] \, ds \quad (2.69)$$

$$\bar{L} = \int_{V_1^+} \{ \bar{r} \times [\bar{J} \times \mu_0 \bar{H} + (\mu_0 \bar{M} \cdot \bar{\nabla}) \bar{H}] + \mu_0 \bar{M} \times \bar{H} \} \, dv \quad (2.70)$$

$$= \int_{V_1^-} [\bar{r} \times (\bar{J} \times \mu_0 \bar{H} + (\mu_0 \bar{M} \cdot \bar{\nabla}) \bar{H})] \, dv + \oint_{S_1^-} \bar{r} \times \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n} \, ds \quad (2.71)$$

$$= \int_{V_1} (\bar{r} \times \bar{f}_c + \bar{c}_c) \, dv + \oint_{S_1} \bar{r} \times \bar{T}_c(\bar{n}) \, ds \quad (2.72)$$

$$= \oint_{S_1} \bar{r} \times \left\{ \bar{n} \cdot \left(\bar{B} \bar{H} - \frac{\mu_0}{2} \bar{H}^2 \bar{I} \right) + \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n} \right\} \, ds \quad (2.73)$$

$$= \oint_{S_1} \bar{r} \times [\bar{n} \cdot \bar{T}_c + \bar{T}_c(\bar{n})] ds \quad (2.74)$$

Volgens (2.67) en (2.72) kunnen de kracht en het moment inwerkend op een deel van een magnetisch lichaam door de magnetische langeafstandskrachtwerking, berekend worden aan de hand van de fictieve kracht- en koppeldichtheid \bar{f}_c en \bar{c}_c binnen V_1 en een extra spanning $\bar{T}_c(\bar{n})$ op het oppervlak S_1 . Deze kracht en dit moment kunnen volgens (2.69) en (2.74) eveneens gevonden worden aan de hand van de volgende 'elektromagnetische spanning' op het oppervlak:

$$\bar{\sigma}_{em} = \bar{n} \cdot \left(\bar{B}\bar{H} - \frac{\mu_0}{2} H^2 \bar{I} \right) + \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n} = \bar{n} \cdot \bar{T}_c + \bar{T}_c(\bar{n}) \quad (2.75)$$

Deze berekeningswijze geldt eveneens voor de andere fictieve kracht- en koppeldichtheden en hun corresponderende singulariteiten aan randoppervlakken die in §2.2.3 en §2.2.4 werden afgeleid.

We kunnen de kracht en het moment op V_1 gegeven door (2.51) en (2.52) bijvoorbeeld omvormen tot de kracht en het moment die het veld \bar{H}_0 uitoefent op de magnetische ladingsdichtheid ϱ_m :

$$\begin{aligned} \bar{F}_0 &= \int_{V_1} [\bar{J} \times \mu_0 \bar{H}_0 + (\mu_0 \bar{M} \cdot \bar{\nabla}) \bar{H}_0] dv \quad (2.76) \\ &= \int_{V_1^+} [\bar{J} \times \mu_0 \bar{H}_0 - (\bar{\nabla} \cdot \mu_0 \bar{M}) \bar{H}_0 + \bar{\nabla} \cdot (\mu_0 \bar{M} \bar{H}_0)] dv \\ &= \int_{V_1^+} (\bar{J} \times \mu_0 \bar{H}_0 + \varrho_m \bar{H}_0) dv + \oint_{S_1^+} \bar{n} \cdot (\mu_0 \bar{M} \bar{H}_0) ds \\ &= \int_{V_1^+} (\bar{J} \times \mu_0 \bar{H}_0 + \varrho_m \bar{H}_0) dv \quad (2.77) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_0 &= \int_{V_1} \{ \bar{r} \times [\bar{J} \times \mu_0 \bar{H}_0 + (\mu_0 \bar{M} \cdot \bar{\nabla}) \bar{H}_0] + \mu_0 \bar{M} \times \bar{H}_0 \} dv \quad (2.78) \\ &= \int_{V_1} \{ \bar{r} \times [\bar{J} \times \mu_0 \bar{H}_0 - (\bar{\nabla} \cdot \mu_0 \bar{M}) \bar{H}_0] + \bar{r} \times \bar{\nabla} \cdot (\mu_0 \bar{M} \bar{H}_0) + \mu_0 \bar{M} \times \bar{H}_0 \} dv \\ &= \int_{V_1^+} \bar{r} \times [\bar{J} \times \mu_0 \bar{H}_0 + \varrho_m \bar{H}_0] dv + \oint_{S_1^+} \bar{r} \times \bar{n} \cdot \mu_0 \bar{M} \bar{H}_0 ds \\ &= \int_{V_1^+} \bar{r} \times [\bar{J} \times \mu_0 \bar{H}_0 + \varrho_m \bar{H}_0] dv \quad (2.79) \end{aligned}$$

Verder kan terug eenvoudig aangetoond worden dat de corresponderende uitdrukkingen in functie van het \bar{H}_1 -veld nul zijn:

$$\bar{F}_1 = \int_{V_1^+} [\bar{J} \times \mu_0 \bar{H}_1 - (\bar{\nabla} \cdot \mu_0 \bar{M}) \bar{H}_1] dv \quad (2.80)$$

$$= 0 \quad (2.81)$$

$$\bar{L}_1 = \int_{V_1^+} \bar{\mathbf{r}} \times [\bar{\mathbf{J}} \times \mu_0 \bar{\mathbf{H}}_1 - (\bar{\nabla} \cdot \mu_0 \bar{\mathbf{M}}) \bar{\mathbf{H}}_1] dv \quad (2.82)$$

$$= 0 \quad (2.83)$$

Door optelling van \bar{F}_0 en \bar{F}_1 en van \bar{L}_0 en \bar{L}_1 bekomen we terug de kracht \bar{F} en het moment \bar{L} in functie van het totale \bar{H} -veld maar ditmaal uitgedrukt aan de hand van $\bar{f}_{c'}$, $c_{c'}$ en $\bar{T}_{c'}$:

$$\bar{F} = \bar{F}_0 + \bar{F}_1 \quad (2.84)$$

$$= \int_{V_1^+} [\bar{\mathbf{J}} \times \mu_0 \bar{\mathbf{H}} - (\bar{\nabla} \cdot \mu_0 \bar{\mathbf{M}}) \bar{\mathbf{H}}] dv \quad (2.85)$$

$$= \int_{V_1^-} [\bar{\mathbf{J}} \times \mu_0 \bar{\mathbf{H}} - (\bar{\nabla} \cdot \mu_0 \bar{\mathbf{M}}) \bar{\mathbf{H}}] dv + \oint_{S_1} \left(\bar{\mathbf{n}} \cdot \mu_0 \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{H}} + \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{\mathbf{n}} \right) ds$$

$$= \int_{V_1} \bar{f}_{c'} dv + \oint_{S_1} \bar{T}_{c'} ds \quad (2.86)$$

$$= \oint_{S_1} \left[\bar{\mathbf{n}} \cdot \left(\mu_0 \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{H}} - \frac{\mu_0}{2} H^2 \bar{\mathbf{I}} \right) + \bar{\mathbf{n}} \cdot \mu_0 \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{H}} + \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{\mathbf{n}} \right] ds \quad (2.87)$$

$$= \oint_{S_1} \left(\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{c'} + \bar{T}_{c'} \right) ds \quad (2.88)$$

$$\bar{L} = \bar{L}_0 + \bar{L}_1 \quad (2.89)$$

$$= \int_{V_1^+} \bar{\mathbf{r}} \times [\bar{\mathbf{J}} \times \mu_0 \bar{\mathbf{H}} - (\bar{\nabla} \cdot \mu_0 \bar{\mathbf{M}}) \bar{\mathbf{H}}] dv \quad (2.90)$$

$$= \int_{V_1^-} \bar{\mathbf{r}} \times [\bar{\mathbf{J}} \times \mu_0 \bar{\mathbf{H}} - (\bar{\nabla} \cdot \mu_0 \bar{\mathbf{M}}) \bar{\mathbf{H}}] dv + \oint_{S_1^-} \bar{\mathbf{r}} \times \left(\bar{\mathbf{n}} \cdot \mu_0 \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{H}} + \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{\mathbf{n}} \right) ds \quad (2.91)$$

$$= \int_{V_1} \bar{\mathbf{r}} \times \bar{f}_{c'} dv + \oint_{S_1} \bar{\mathbf{r}} \times \bar{T}_{c'} ds \quad (2.92)$$

$$= \oint_{S_1} \bar{\mathbf{r}} \times \left[\bar{\mathbf{n}} \cdot \left(\mu_0 \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{H}} - \frac{\mu_0}{2} H^2 \bar{\mathbf{I}} \right) + \bar{\mathbf{n}} \cdot \mu_0 \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{H}} + \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{\mathbf{n}} \right] ds \quad (2.93)$$

$$= \oint_{S_1} \bar{\mathbf{r}} \times \left[\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{c'} + \bar{T}_{c'}(\bar{\mathbf{n}}) \right] ds \quad (2.94)$$

Uit (2.86) en (2.92) blijkt dus dat de kracht en het moment kunnen berekend worden aan de hand van $\bar{f}_{c'}$ en $\bar{T}_{c'}$, m.a.w. op basis van de kracht op de bronnen die de magnetisatie voorstellen, met name, in het geval van het Chu-model, de magnetische ladingsdichtheid ϱ_m .

Volgens (2.88) en (2.94) bekommen we dezelfde elektromagnetische spanning $\bar{\sigma}_{em}$ als voorheen (2.75),

$$\bar{\sigma}_{em} = \bar{n} \cdot \bar{T}_{c'} + \bar{T}_{c'} \quad (2.95)$$

$$= \bar{n} \cdot \left(\mu_0 \bar{H} \bar{H} - \frac{\mu_0}{2} H^2 \bar{I} \right) + \bar{n} \cdot \mu_0 \bar{M} \bar{H} + \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n}$$

$$= \bar{n} \cdot \left(\bar{B} \bar{H} - \frac{\mu_0}{2} H^2 \bar{I} \right) + \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n}$$

$$= \bar{n} \cdot \bar{T}_c + \bar{T}_c \quad (2.96)$$

2.3.3 De elektromagnetische spanning $\bar{\sigma}_{em}$ - fysische betekenis en eigenschappen

De redenering van de voorgaande paragraaf kan nu herhaald worden voor het Ampère-model. Aangezien het uitgangspunt, nl. de kracht en het koppel op een dipool binnen V_1 uitgeoefend door het veld \bar{H}_0 opgewekt door de bronnen buiten V_1 , identiek is voor het Chu- en het Ampère-model volgens (2.49) en (2.50), zal het eindresultaat, nl. de kracht en het moment op een deel van een magnetisch lichaam, eveneens identiek zijn.

De totale kracht en het totaal moment uitgeoefend op het materiaal binnen V_1 t.g.v. de magnetische langeafstandskrachten kunnen bijgevolg berekend worden aan de hand van de vier kracht- en koppeldichtheden en hun corresponderende spanningen op randoppervlakken:

$$\bar{F} = \int_{V_1} \bar{f}_c \, dv + \oint_{S_1} \bar{T}_c(\bar{n}) \, ds \quad (2.97)$$

$$= \int_{V_1} \bar{f}_{c'} \, dv + \oint_{S_1} \bar{T}_{c'}(\bar{n}) \, ds \quad (2.98)$$

$$= \int_{V_1} \bar{f}_a \, dv + \oint_{S_1} \bar{T}_a(\bar{n}) \, ds \quad (2.99)$$

$$= \int_{V_1} \bar{f}_{a'} \, dv + \oint_{S_1} \bar{T}_{a'}(\bar{n}) \, ds \quad (2.100)$$

$$= \oint_{S_1} \bar{\sigma}_{em} \, ds \quad (2.101)$$

$$\bar{L} = \int_{V_1} (\bar{r} \times \bar{f}_c + \bar{c}_c) \, dv + \oint_{S_1} \bar{r} \times \bar{T}_c(\bar{n}) \, ds \quad (2.102)$$

$$= \int_{V_1} \bar{r} \times \bar{f}_{c'} \, dv + \oint_{S_1} \bar{r} \times \bar{T}_{c'}(\bar{n}) \, ds \quad (2.103)$$

$$= \int_{V_1} (\bar{r} \times \bar{f}_a + \bar{c}_a) \, dv + \oint_{S_1} \bar{r} \times \bar{T}_a(\bar{n}) \, ds \quad (2.104)$$

$$= \int_{V_1} \bar{r} \times \bar{f}_{a'} \, dv + \oint_{S_1} \bar{r} \times \bar{T}_{a'}(\bar{n}) \, ds \quad (2.105)$$

$$= \oint_{S_1} \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\sigma}_{em} ds \quad (2.106)$$

De elektromagnetische spanning $\bar{\sigma}_{em}$ kan hierbij uitgedrukt worden aan de hand van de tensoren $\bar{\bar{T}}_c, \bar{\bar{T}}_{c'}, \bar{\bar{T}}_a$ en $\bar{\bar{T}}_{a'}$ en de spanningen $\bar{T}_c, \bar{T}_{c'}, \bar{T}_a$ en $\bar{T}_{a'}$:

$$\bar{\sigma}_{em}(\bar{n}) = \bar{n} \cdot \bar{\bar{T}}_c + \bar{T}_c \quad (2.107)$$

$$= \bar{n} \cdot \left(\bar{B}\bar{H} - \frac{1}{2}\mu_0 H^2 \bar{\bar{I}} \right) + \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n} \quad (2.108)$$

$$= \bar{n} \cdot \bar{\bar{T}}_{c'} + \bar{T}_{c'} \quad (2.109)$$

$$= \bar{n} \cdot \left(\bar{H}\bar{H} - \frac{1}{2}\mu_0 H^2 \bar{\bar{I}} \right) + \bar{n} \cdot \mu_0 \bar{M}\bar{H} + \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n} \quad (2.110)$$

$$= \bar{n} \cdot \bar{\bar{T}}_a + \bar{T}_a \quad (2.111)$$

$$= \bar{n} \cdot \left[\bar{B}\bar{H} - \left(\frac{1}{2}\mu_0 H^2 - \frac{1}{2}\mu_0 M^2 \right) \bar{\bar{I}} \right] - \frac{1}{2}\mu_0 M_t^2 \bar{n} \quad (2.112)$$

$$= \bar{n} \cdot \bar{\bar{T}}_{a'} + \bar{T}_{a'} \quad (2.113)$$

$$= \bar{n} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \bar{B}\bar{B} - \frac{1}{2\mu_0} B^2 \bar{\bar{I}} \right) + (\bar{B} \cdot \bar{M}) \bar{n} - \bar{n} \cdot (\bar{B}\bar{M}) - \frac{1}{2}\mu_0 M_t^2 \bar{n} \quad (2.114)$$

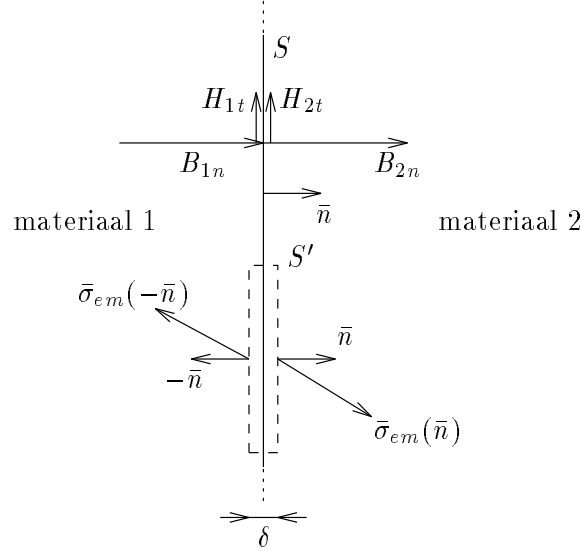
Deze elektromagnetische spanning $\bar{\sigma}_{em}$ heeft geen lokale betekenis, enkel de totale kracht en het totaal moment t.g.v. de magnetische langeafstandskrachten die inwerken op het materiaal binnen een volume V kunnen ermee berekend worden.

We merken verder op dat $\bar{\sigma}_{em}(\bar{n})$ niet kan afgeleid worden van een elektromagnetische spanningstensor $\bar{\bar{T}}_{em}$. Dit betekent dat de magnetische langeafstandskrachten niet kunnen geschreven worden in de vorm van een kracht per volume-eenheid ($\bar{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}}_{em}$). Het is dus niet zonder meer mogelijk om met de klassieke elasticiteitsleer de vervorming t.g.v. de magnetische langeafstandskrachten te berekenen.

Bovendien is er ook een koppeldichtheid, nl. $\bar{c}_c = \bar{c}_a = \bar{M} \times \mu_0 \bar{H}$, die in de klassieke elasticiteitsleer niet voorkomt. In tegenstelling tot de krachtdichtheid kan men immers wel spreken van een koppeldichtheid. Dit kan eenvoudig ingezien worden als men het moment berekent om het middelpunt van een elementaire kubus volgens (2.72) :

$$\bar{L} = \int_{V_1} (\bar{\mathbf{r}} \times \bar{f}_c + \bar{c}_c) dv + \oint_{S_1} \bar{\mathbf{r}} \times \bar{T}_c(\bar{n}) ds \quad (2.115)$$

Als men de afmetingen van de kubus naar nul laat gaan kan men \bar{f}_c en \bar{c}_c als constant binnen het volume beschouwen en $\bar{T}_c(\bar{n}) = \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n}$ als constant op de zes zijvlakken. In dit geval verdwijnt de term $\int_{V_1} \bar{\mathbf{r}} \times \bar{f}_c dv$ en aangezien $\bar{T}_c(\bar{n})$ enkel uit een normaalspanning bestaat verdwijnt ook $\oint_{S_1} \bar{\mathbf{r}} \times \bar{T}_c(\bar{n}) ds$. In het rechterlid blijft dus enkel de term $\int_{V_1} \bar{c}_c dv$ over, zodat \bar{c}_c inderdaad het koppel per volume-eenheid voorstelt. In het vervolg van dit hoofdstuk wordt besproken hoe de klassieke elasticiteitstheorie kan aangepast worden om met het specifieke karakter van de magnetische langeafstandskrachtwerking rekening te houden.



Figuur 2.4: Magnetische langeafstandskracht op een scheidingsoppervlak

De vector $\bar{\sigma}_{em}$ kan opgesplitst worden in een normale en een tangentiale component:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{em,n} &= B_n H_n - \frac{\mu_0}{2} (H^2 - M_n^2) \\
 &= \frac{1}{\mu_0} B_n^2 - B_n M_n - \frac{\mu_0}{2} \left(H_n^2 + H_t^2 - \left(\frac{1}{\mu_0} B_n - H_n \right)^2 \right) \\
 &= \frac{B_n^2}{2\mu_0} - \frac{\mu_0 H_t^2}{2}
 \end{aligned} \tag{2.116}$$

$$\sigma_{em,t} = B_n H_t \tag{2.117}$$

Beschouwen we nu een scheidingsoppervlak tussen twee verschillende materialen waar de magnetische velden een discontinuïteit vertonen. We kunnen nu eenvoudig aantonen dat de magnetische langeafstandskrachten geen singulariteit vertonen ter hoogte van scheidingsoppervlakken, m.a.w. dat er op een scheidingsoppervlak geen kracht per oppervlakte-eenheid uitgeoefend wordt door de langeafstandskrachten. We beschouwen daartoe een gesloten oppervlak S' dat een deel van het scheidingsoppervlak S tussen twee materialen omvat, zoals voorgesteld in Figuur 2.4. Voor $\delta \rightarrow 0$ is de kracht op het volume binnen S' gelijk aan de kracht op het omsloten deel van het scheidingsoppervlak S . Wegens de continuïteit van B_n en H_t (in de veronderstelling er zich geen stroomlaag op het scheidingsoppervlak bevindt), m.a.w.

$$B_{2n} = B_{1n} \tag{2.118}$$

$$H_{2t} = H_{1t} \tag{2.119}$$

is volgens (2.116)-(2.117) de elektromagnetische spanning $\bar{\sigma}_{em}(\bar{n})$ aan beide zijden van het scheidingsoppervlak gelijk. De spanningen volgens de buitennormale op het oppervlak S' aan beide zijden van S gegeven door respectievelijk $\bar{\sigma}_{em}(\bar{n})$ en $\bar{\sigma}_{em}(-\bar{n}) = -\bar{\sigma}_{em}(\bar{n})$ heffen elkaar op zodat de kracht op het scheidingsoppervlak S nul is. De langeafstandskrachtwerking vertoont bijgevolg geen singulariteiten (tenzij op stroomlagen, waar de vrije stroomdichtheid een singulariteit vertoont).

Tenslotte beschouwen we volledig magnetisch lichaam dat omsloten wordt door een oppervlak S dat in inert materiaal is gelegen, m.a.w. $\bar{M} = 0$, $\bar{J} = 0$ en $\bar{B} = \mu_0 \bar{H}$ ter hoogte van S . In dit geval zijn de spanningen op S corresponderend met de vier fictieve kracht- en koppeldichtheden nul:

$$\bar{T}_c = \bar{T}_{c'} = \bar{T}_a = \bar{T}_{a'} = 0 \quad (2.120)$$

en herleidt de spanning $\bar{\sigma}_{em}$ zich tot de gekende spanning van Maxwell:

$$\bar{\sigma}_{em} = \bar{n} \cdot \left(\mu_0 \bar{H} \bar{H} - \frac{\mu_0}{2} H^2 \bar{I} \right) \quad (2.121)$$

$$= \bar{n} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \bar{B} \bar{B} - \frac{1}{2\mu_0} B^2 \bar{I} \right) \quad (2.122)$$

$$= \bar{n} \cdot \bar{T}_{Maxwell} \quad (2.123)$$

waarmee men dus volgens (2.101) en (2.106) de kracht en het moment op een volledig lichaam kan berekenen. Aangezien het beschouwde magnetisch lichaam hierbij fysisch (en niet door een denkbeeldige microscopische snede) van de andere magnetische bronnen gescheiden is, is er geen kortefstandskrachtwerking van de andere bronnen op het lichaam en betreft het hier de totale magnetische krachtwerking op dat lichaam.

De algemene uitdrukking voor $\bar{\sigma}_{em}$, die ook gedefinieerd is in het magnetische materiaal, kunnen we bijgevolg de veralgemeende Maxwellspanning noemen.

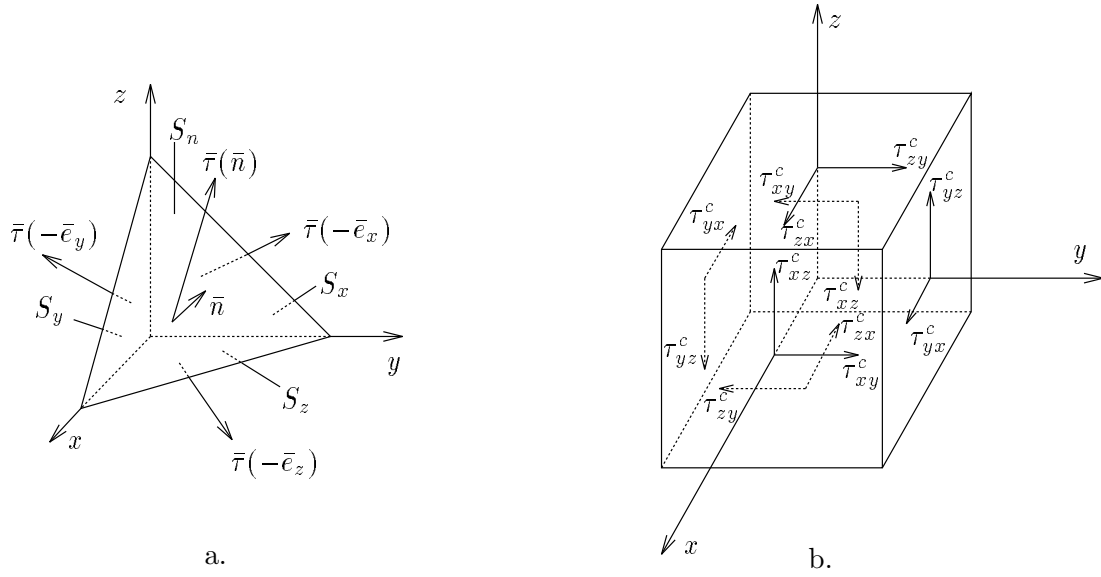
2.4 Spanningen in gemagnetiseerd materiaal

In de vorige paragraaf werden de magnetische langeafstandskrachten die op magnetische lichamen werken afgeleid. Daarnaast kunnen ook nog andere krachtdichtheden \bar{f}_u (bijvoorbeeld de zwaartekracht) en spanningen \bar{T}_u op het oppervlak van het lichaam uitgeoefend worden, die we verder de uitwendige krachten zullen noemen. Naast deze krachten, beschouwen we verder de spanningen in het materiaal $\bar{\tau}(\bar{n})$. In tegenstelling tot de veralgemeende Maxwellspanningen $\bar{\sigma}_{em}$ hebben deze spanningen wel degelijk een lokale betekenis, i.e. de kracht per oppervlakte-eenheid uitgeoefend op een (denkbeeldig) oppervlak met normale \bar{n} . De spanningen zijn dus kortefstandskrachten. Over de aard van deze spanningen doen we (voorlopig) geen uitspraak. De spanningen bestaan dus zowel uit mechanische spanningen (zoals beschouwd in de klassieke elasticiteitsleer) als uit 'magnetische spanningen'. De lokale magnetische krachten (krachtwerking op microscopische schaal) zijn niet begrepen in de langeafstandskrachten en dragen inderdaad bij tot de spanningen (kortefstandskrachten). Om verwarring met de mechanische spanningen uit de klassieke elasticiteitsleer te vermijden wordt hier het symbool τ i.p.v. het meer gebruikelijke symbool σ gebruikt.

Wegens de bijzondere eigenschappen van de magnetische krachten, zullen de vergelijkingen waaraan de spanningen voldoen verschillen van die in de klassieke elasticiteitsleer.

Voor het opstellen van deze vergelijkingen, zullen we hier steeds uitgaan van één van de Chu-formuleringen van $\bar{\sigma}_{em}$, nl.

$$\bar{\sigma}_{em}(\bar{n}) = \bar{n} \cdot \bar{T}_c + \bar{T}_c(\bar{n}) \quad (2.124)$$



Figuur 2.5: Bewegingsvergelijkingen

$$= \bar{n} \cdot \left(\bar{B}\bar{H} - \frac{\mu_0}{2} H^2 \bar{I} \right) + \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n} \quad (2.125)$$

Ten eerste vormen de magnetische krachten geen zuivere volumekrachten, omdat $\bar{\sigma}_{em}$ een term bevat die niet van een tensor afgeleid kan worden. Om evenwicht in een punt te bekomen, zal ook de spanning eenzelfde term moeten bevatten, zij het met tegengesteld teken. Beschouwen we daartoe de tetraëder van Figuur 2.5.a met infinitesimale afmetingen.

De oppervlaktes van de zijvlakken verhouden zich hierbij als

$$S_x = n_x S_n \quad ; \quad S_y = n_y S_n \quad ; \quad S_z = n_z S_n \quad (2.126)$$

waarbij (n_x, n_y, n_z) de cartesische coördinaten zijn van de buitennormale \bar{n} .

De bewegingsvergelijking van de tetraëder luidt:

$$\begin{aligned} \rho \bar{a} V &= [\bar{\tau}(\bar{n}) - n_x \bar{\tau}(\bar{e}_x) - n_y \bar{\tau}(\bar{e}_y) - n_z \bar{\tau}(\bar{e}_z)] S_n \\ &+ \left(\frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n} - \frac{\mu_0}{2} M_x^2 n_x \bar{e}_x - \frac{\mu_0}{2} M_y^2 n_x \bar{e}_y - \frac{\mu_0}{2} M_z^2 n_x \bar{e}_x \right) S_n \\ &+ \rho \left(\bar{f}_u + \bar{\nabla} \cdot \bar{T}_c \right) V \end{aligned} \quad (2.127)$$

Als men de lineaire afmeting van de tetraëder naar nul laat gaan ($l \rightarrow 0$) vermindert het volume V volgens l^3 en de oppervlakte S volgens l^2 .

Voor $l \rightarrow 0$ geldt bijgevolg:

$$\bar{\tau}(\bar{n}) + \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n} = n_x \left[\bar{\tau}(\bar{e}_x) + \frac{\mu_0}{2} M_x^2 \bar{e}_x \right] + n_y \left[\bar{\tau}(\bar{e}_y) + \frac{\mu_0}{2} M_y^2 \bar{e}_y \right]$$

$$+ n_z \left[\bar{\tau}(\bar{e}_z) + \frac{\mu_0}{2} M_z^2 \bar{e}_z \right] \quad (2.128)$$

Hieruit blijkt dat $\bar{\tau}(\bar{n}) + \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n}$ afgeleid kan worden van een tensor $\bar{\tau}_c$:

$$\bar{\tau}(\bar{n}) + \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n} = \bar{n} \cdot \bar{\tau}_c$$

of:

$$\bar{\tau}(\bar{n}) = \bar{n} \cdot \bar{\tau}_c - \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n} \quad (2.129)$$

$$= \bar{n} \cdot \bar{\tau}_c - \bar{T}_c(\bar{n}) \quad (2.130)$$

De opsplitsing van $\bar{\tau}(\bar{n})$ in twee delen volgens (2.130) volgt uit de gebruikte Chu-formulering van $\bar{\sigma}_{em}$ volgens (2.124). Alle grootheden die van de gebruikte formulering afhangen en op zich dus geen rechtstreekse fysische betekenis hebben (zoals $\bar{\tau}_c$) zullen in de verdere redenering steeds met de corresponderende index (in dit geval 'c') aangeduid worden.

In het cartesiaans assenstelsel $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ kan de tensor $\bar{\tau}_c$ voorgesteld worden door zijn geassocieerde matrix $[\tau_c]$:

$$[\tau_c] = \begin{bmatrix} \tau_{xx}^c & \tau_{xy}^c & \tau_{xz}^c \\ \tau_{yx}^c & \tau_{yy}^c & \tau_{yz}^c \\ \tau_{zx}^c & \tau_{zy}^c & \tau_{zz}^c \end{bmatrix} \quad (2.131)$$

De term $\bar{n} \cdot \bar{\tau}_c$ is een lineaire functie van $\bar{n}(n_x, n_y, n_z)$ nl.:

$$\bar{n} \cdot \bar{\tau}_c = n_x(\tau_{xx}^c \bar{e}_x + \tau_{xy}^c \bar{e}_y + \tau_{xz}^c \bar{e}_z) + n_y(\tau_{yx}^c \bar{e}_x + \tau_{yy}^c \bar{e}_y + \tau_{yz}^c \bar{e}_z) + n_z(\tau_{zx}^c \bar{e}_x + \tau_{zy}^c \bar{e}_y + \tau_{zz}^c \bar{e}_z) \quad (2.132)$$

terwijl de term $-\frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n} = -\bar{T}_c(\bar{n})$ een derdegraadsveelterm in $\bar{n}(n_x, n_y, n_z)$ is:

$$-\frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n} = -\frac{\mu_0}{2} (M_x^2 n_x^2 + M_y^2 n_y^2 + M_z^2 n_z^2) (n_x \bar{e}_x + n_y \bar{e}_y + n_z \bar{e}_z) \quad (2.133)$$

en dus niet door een tensor kan beschreven worden.

Aangezien de elektromagnetische spanning $\bar{\sigma}_{em}$ de term $\bar{T}_c(\bar{n}) = \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n}$ bevat die niet in de vorm van een tensor kan geschreven worden kan de magnetische langeafstandskrachtwerking niet geschreven worden in de vorm van een krachtdichtheid (kracht per volume-eenheid). Dit heeft dus als gevolg dat ook de korteafstandskrachtwerking, m.a.w. de spanning $\bar{\tau}(\bar{n})$ (2.130), een term bevat die niet van een tensor kan afgeleid worden.

Ten tweede veroorzaakt de magnetische krachtwerking een koppeldichtheid $\mu_0 \bar{M} \times \bar{H}$ die weerpiegeld wordt in de asymmetrie van \bar{T}_c , zoals aangetoond in Appendix A. De spanningen $\bar{\tau}$ vertonen bijgevolg dezelfde asymmetrie zij het met tegengesteld teken. Dit volgt uit de koppelvergelijkingen toegepast op het de elementaire kubus van Figuur 2.5.b, waar enkel de tangentiële

spanningscomponenten (dus de niet-diagonaalelementen van de spanningsmatrix $[\tau_c]$) voorgesteld zijn.

$$\begin{aligned}
l^3 (\tau_{yz}^c - \tau_{zy}^c) + l^3 \mu_0 (M_y H_z - M_z H_y) &= I_x \dot{\omega}_x \\
l^3 (\tau_{zx}^c - \tau_{xz}^c) + l^3 \mu_0 (M_z H_x - M_x H_z) &= I_y \dot{\omega}_y \\
l^3 (\tau_{xy}^c - \tau_{yx}^c) + l^3 \mu_0 (M_x H_y - M_y H_x) &= I_z \dot{\omega}_z
\end{aligned} \tag{2.134}$$

met I het traagheidsmoment en $\dot{\omega}$ de hoekversnelling om de drie assen.

De termen $\mu_0 (M_y H_z - M_z H_y)$, ... worden hierbij afgeleid van $\bar{\sigma}_{em}$ (2.125), meer bepaald van het antisymmetrisch deel van \bar{T}_c , en vormen de drie componenten van de koppeldichtheid $\mu_0 \bar{M} \times \bar{H}$.

Voor $l \rightarrow 0$ verdwijnt het rechterlid omdat I evenredig is met l^4 , zodat het verwachte resultaat bekomen wordt, dat in tensornotatie kan geschreven worden als:

$$\bar{\tau}_c - \bar{\tau}_c^T + \mu_0 (\bar{M} \bar{H} - \bar{H} \bar{M}) = 0 \tag{2.135}$$

of m.a.w. de antisymmetrische delen van $\bar{\tau}_c$ en \bar{T}_c compenseren elkaar.

Men stelt verder de bewegingsvergelijking op van een willekeurig volume V binnen het beschouwde lichaam:

$$\begin{aligned}
\int_V \varrho \bar{a} \, dv &= \int_V \varrho \bar{f}_u \, dv + \oint_S \bar{\sigma}_{em}(\bar{n}) \, ds + \oint_S \bar{\tau}(\bar{n}) \, ds \\
&= \int_V \varrho \bar{f}_u \, dv + \oint_S \left(\bar{n} \cdot \bar{T}_c + \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n} \right) \, ds + \oint_S \left(\bar{n} \cdot \bar{\tau}_c - \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n} \right) \, ds \\
&= \int_V \left(\varrho \bar{f}_u + \bar{\nabla} \cdot \bar{T}_c + \bar{\nabla} \cdot \bar{\tau}_c \right) \, dv
\end{aligned} \tag{2.136}$$

Aangezien dit geldt voor een willekeurig volume, volgt hieruit:

$$\varrho \bar{a} = \varrho \bar{f}_u + \bar{\nabla} \cdot \bar{T}_c + \bar{\nabla} \cdot \bar{\tau}_c \tag{2.137}$$

$$= \varrho \bar{f}_u + \bar{f}_c + \bar{\nabla} \cdot \bar{\tau}_c \tag{2.138}$$

Tot slot beschouwt men het oppervlak van het lichaam waar (eventueel) een uitwendige spanning \bar{T}_u wordt op aangebracht. Aangezien de magnetische langeafstandskrachtwerking geen kracht op een scheidingsoppervlak uitoefent, zoals hoger reeds aangetoond, leidt de bewegingsvergelijking van het oppervlak tot:

$$\bar{\tau}(\bar{n}) = \bar{T}_u \tag{2.139}$$

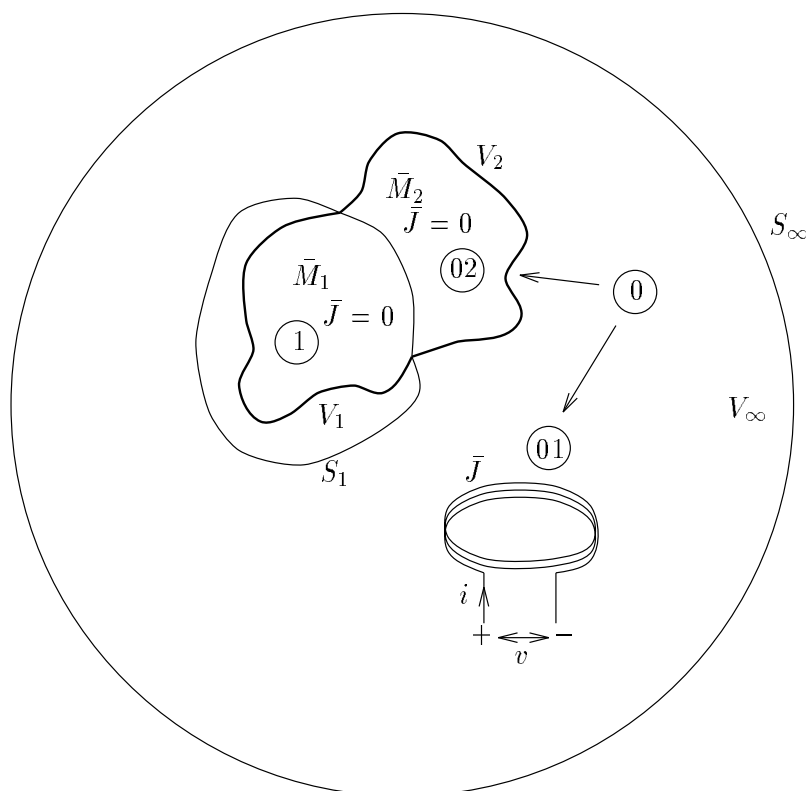
of

$$\bar{n} \cdot \bar{\tau}_c = \bar{T}_u + \bar{T}_c(\bar{n}) = \bar{T}_u + \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n} \tag{2.140}$$

2.5 Arbeid en energie in elastisch gemagnetiseerd materiaal

2.5.1 Arbeid en magnetische energie in niet-bewegende middenstoffen

Om eenvoudig onderscheid te kunnen maken tussen energie en arbeid geleverd of opgenomen door de stromen en het magnetisch materiaal, wordt de situatie voorgesteld in Figuur 2.6 aangenomen. Zoals voorheen wordt een deel magnetisch materiaal V_1 afgezonderd, waarbij terug verondersteld wordt dat de andere bronnen zich op microscopische schaal ver bevinden (d.i. met invoering van een snede tussen V_1 en de rest van het magnetisch materiaal). De bronnen buiten V_1 bestaan uit de vrije stromen \bar{J} , symbolisch voorgesteld door een stroomkring, en het magnetisch materiaal \bar{M}_2 in V_2 . Alle magnetisch materiaal wordt nu stroomloos verondersteld.



Figuur 2.6: Indeling van de magnetische bronnen

Als uitgangspunt nemen we de arbeid geleverd door de spanningsbronnen. Beschouwen we ten eerste het geval waarbij de stroom geconcentreerd is in een aantal dunne geleiders die stroomringen vormen zodat we de stroomdichtheid \bar{J} kunnen beschrijven aan de hand van de stroom i in de geleiders. Voor een stroomkring is de aangelegde spanning v gelijk aan de som van de resistieve spanningsval en de geïnduceerde spanning:

$$v = Ri + \frac{d\Psi}{dt} \quad (2.141)$$

met v , i , R en Ψ respectievelijk de aangelegde spanning, de stroom, de weerstand en de gekoppelde

flux van de stroomkring.

De arbeid die in een tijdsinterval dt aan het beschouwde systeem wordt geleverd door een spanningsbron wordt bijgevolg gegeven door

$$vi dt = Ri^2 dt + i d\Psi \quad (2.142)$$

De term $Ri^2 dt$ is gelijk aan het Joule-verlies in de stroomkring en wordt dus gedissipeerd zodat enkel de term $i d\Psi$ aan het beschouwde magnetische veldsysteem wordt geleverd. In het vervolg wordt met 'de arbeid geleverd door de spanningsbronnen' steeds de arbeid bedoeld die aan het magnetisch systeem geleverd wordt, m.a.w. $i d\Psi$. De langs elektrische weg toegevoerde arbeid dW_e wordt dus gegeven door:

$$dW_e = i d\Psi \quad (2.143)$$

Met behulp van de vectorpotential \bar{A} met

$$\bar{\nabla} \times \bar{A} = \bar{B} \quad (2.144)$$

wordt de flux Ψ gekoppeld met een gesloten stroomkring C gegeven door:

$$\Psi = \int_S \bar{B} \cdot \bar{n} ds = \int_S \bar{\nabla} \times \bar{A} \cdot \bar{n} ds = \oint_C \bar{A} \cdot d\bar{l} \quad (2.145)$$

met S een willekeurig oppervlak dat de stroomkring omspant. De arbeid geleverd door de spanningsbronnen wordt bijgevolg gegeven door:

$$dW_e = i d\Psi = \oint_C i d\bar{A} \cdot d\bar{l} \quad (2.146)$$

In het geval van een willekeurige stroomverdeling wordt de arbeid dW_e bekomen door in (2.146) $i d\bar{l}$ te vervangen door $\bar{J} dv$ en kan als volgt worden uitgewerkt²:

$$dW_e = \int_{V_\infty} \bar{J} \cdot d\bar{A} dv \quad (2.147)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{V_\infty} (\bar{\nabla} \times \bar{H}) \cdot d\bar{A} dv \\ &= \int_{V_\infty} [\bar{\nabla} \cdot (\bar{H} \times d\bar{A}) + \bar{H} \cdot \bar{\nabla} \times d\bar{A}] dv \\ &= \oint_{S_\infty} \bar{n} \cdot (\bar{H} \times d\bar{A}) ds + \int_{V_\infty} \bar{H} \cdot d\bar{B} dv \end{aligned} \quad (2.148)$$

$$= \int_{V_\infty} \bar{H} \cdot d\bar{B} dv \quad (2.149)$$

Uit de bovenstaande redenering kunnen we de volgende algemene stelling formuleren voor twee velden \bar{X}_1 en \bar{X}_2 die volgens r^{-2} afnemen voor $r \rightarrow \infty$:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\nabla} \times \bar{X}_1 = \bar{J} \\ \bar{X}_2 = \bar{\nabla} \times \bar{A} \end{array} \right\} (\bar{\nabla} \cdot \bar{X}_2 = 0) \Rightarrow \int_{V_\infty} \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2 \, dv = \int_{V_\infty} \bar{J} \cdot \bar{A} \, dv \quad (2.150)$$

en in het bijzonder :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\nabla} \times \bar{X}_1 = 0 \\ \bar{\nabla} \cdot \bar{X}_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \int_{V_\infty} \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2 \, dv = 0 \quad (2.151)$$

De magnetische velden worden nu ontbonden volgens de verschillende bronnen waardoor ze opgewekt worden, bekeken vanuit het standpunt van het afgezonderde magnetisch materiaal in V_1 . Bijvoorbeeld, het \bar{H} -veld wordt geschreven als:

$$\bar{H} = \bar{H}_{01} + \bar{H}_{02} + \bar{H}_1 = \bar{H}_0 + \bar{H}_1 \quad (2.152)$$

waarbij de indices de volgende betekenis dragen, zie ook Figuur 2.6:

- index 0 : velden opgewekt door de bronnen buiten V_1 waarvan:
 - index 01 : velden opgewekt door de vrije stromen \bar{J}
 - index 02 : velden opgewekt door het magnetisch materiaal (\bar{M}_2) binnen het volume V_2
- index 1 : velden opgewekt door het magnetisch materiaal (\bar{M}_1) binnen V_1

Uit het stroomvrij zijn van het magnetisch materiaal, zodat

$$\bar{\nabla} \times \bar{H}_{02} = \bar{\nabla} \times \bar{H}_1 = 0 \quad (2.153)$$

en uit $\bar{\nabla} \cdot d\bar{B} = 0$ volgt volgens de stelling (2.151) dat de arbeid geleverd door de spanningsbronnen (2.149) als volgt kan geformuleerd worden:

$$\begin{aligned} dW_e &= \int_{V_\infty} (\bar{H}_{01} + \bar{H}_{02} + \bar{H}_1) \cdot d\bar{B} \, dv \\ &= \int_{V_\infty} \bar{H}_{01} \cdot d\bar{B} \, dv \end{aligned} \quad (2.154)$$

Verder volgt uit

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{H}_{01} = \frac{1}{\mu_0} \bar{\nabla} \cdot \bar{B}_{01} = 0 \quad (2.155)$$

$$\bar{B} = \mu_0 (\bar{H}_{01} + \bar{H}_{02} + \bar{H}_1 + \bar{M}_1 + \bar{M}_2) \quad (2.156)$$

²Aangezien de velden minstens volgens r^{-2} verminderen voor $r \rightarrow \infty$ is de oppervlakte-integraal in (2.148) nul.

en (2.153) de volgende uitdrukking voor dW_e :

$$dW_e = \int_{V_\infty} \mu_0 \bar{H}_{01} \cdot d\bar{H}_{01} dv + \int_{V_1} \mu_0 \bar{H}_{01} \cdot d\bar{M}_1 dv + \int_{V_2} \mu_0 \bar{H}_{01} \cdot d\bar{M}_2 dv \quad (2.157)$$

De eerste term is de variatie van de magnetostatische energie indien er geen magnetisch materiaal aanwezig zou zijn:

$$\int_{V_\infty} \mu_0 \bar{H}_{01} \cdot d\bar{H}_{01} dv = d \int_{V_\infty} \frac{\mu_0}{2} H_{01}^2 dv \quad (2.158)$$

Dit deel van de energie dat door de spanningsbronnen geleverd wordt, en dat te wijten is aan het veld door de stromen zelf opgewekt, wordt de magnetische zelfenergie van de stromen genoemd. De rest van de arbeid dW_e is volgens (2.157) te wijten aan de magnetisatieverandering in V_1 en V_2 .

Verder is er ook onderlinge uitwisseling van energie tussen het materiaal in V_1 en V_2 . Analoog aan de arbeid $\int_{V_1} \mu_0 \bar{H}_{01} \cdot d\bar{M}_1 dv$ die de spanningsbronnen volgens (2.157) leveren aan het materiaal in V_1 , levert het magnetisch materiaal in V_2 de arbeid $\int_{V_1} \mu_0 \bar{H}_{02} \cdot d\bar{M}_1 dv$ aan V_1 . Omgekeerd is er een energiestroom $\int_{V_2} \mu_0 \bar{H}_1 \cdot d\bar{M}_2 dv$ van V_1 naar V_2 . Met behulp van de stelling (2.151) en de eigenschappen van de afzonderlijke velden gegeven door

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B}_{02} = \mu_0 \bar{\nabla} \cdot (\bar{H}_{02} + \bar{M}_2) = 0 \quad (2.159)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B}_1 = \mu_0 \bar{\nabla} \cdot (\bar{H}_1 + \bar{M}_1) = 0 \quad (2.160)$$

en (2.153), komt men tot de volgende betrekkingen voor de onderlinge energie-uitwisseling:

$$\int_{V_1} \mu_0 \bar{H}_{02} \cdot d\bar{M}_1 dv + \int_{V_\infty} \mu_0 \bar{H}_{02} \cdot d\bar{H}_1 dv = 0 \quad (2.161)$$

$$\int_{V_2} \mu_0 \bar{H}_1 \cdot d\bar{M}_2 dv + \int_{V_\infty} \mu_0 \bar{H}_1 \cdot d\bar{H}_{02} dv = 0 \quad (2.162)$$

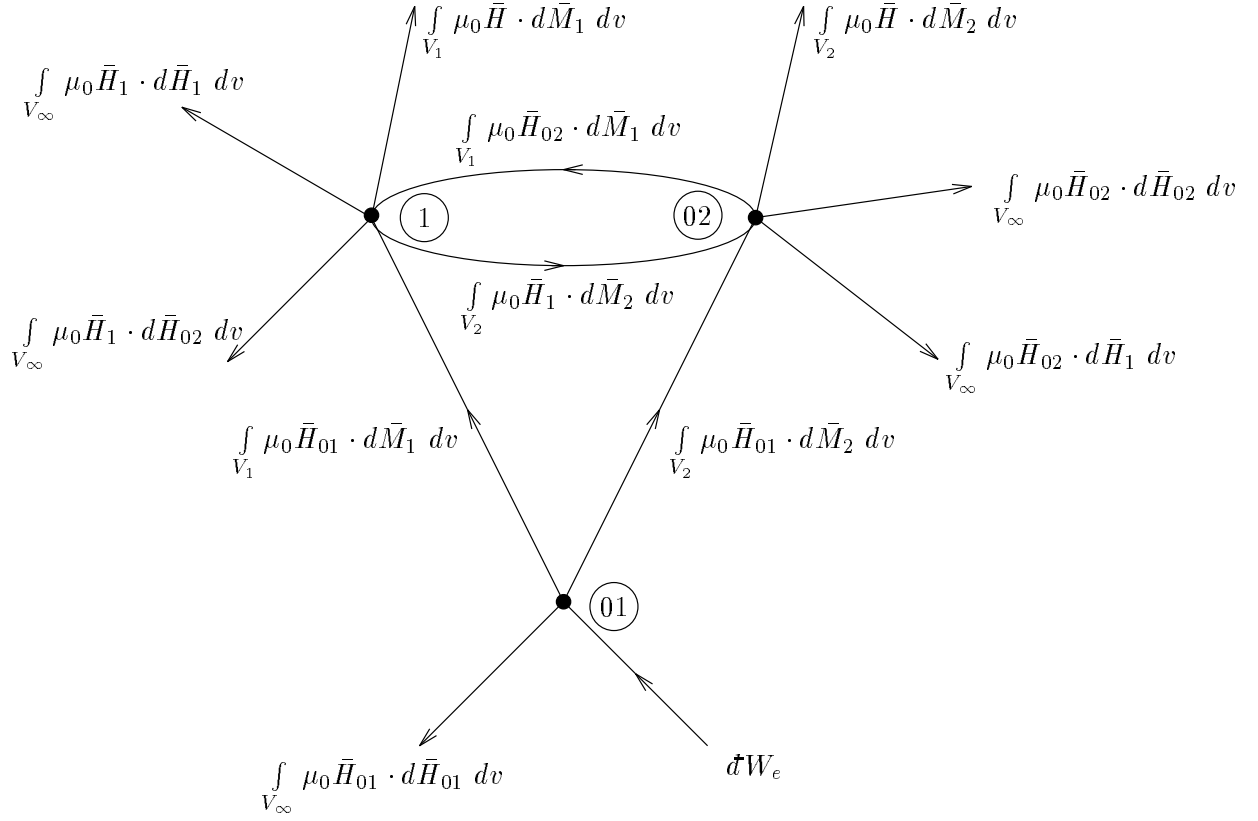
Beschouwen we nu het magnetische materiaal in V_1 . De arbeid die de magnetische bronnen buiten V_1 (index 0) leveren bij een variatie van de magnetisatie in V_1 (index 1) kan, gebruikmakend van

$$\bar{\nabla} \times \bar{H}_1 = 0 \quad (2.163)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B}_1 = 0 \quad (2.164)$$

en de stelling (2.151), als volgt geschreven worden:

$$dW_{0 \rightarrow 1} = \int_{V_1} \mu_0 (\bar{H}_{01} + \bar{H}_{02}) \cdot d\bar{M}_1 dv$$



Figuur 2.7: Arbeid en energie in niet-bewegende middenstoffen

$$= \int_{V_1} \mu_0 \bar{H}_0 \cdot d\bar{M}_1 dv \quad (2.165)$$

$$= \int_{V_1} \mu_0 \bar{H}_0 \cdot d\bar{M}_1 dv + \int_{V_\infty} \mu_0 \bar{H}_1 \cdot d\bar{M}_1 dv + \int_{V_\infty} \mu_0 \bar{H}_1 \cdot d\bar{H}_1 dv$$

$$= \int_{V_1} \mu_0 \bar{H} \cdot d\bar{M}_1 dv + \int_{V_\infty} d\left(\frac{\mu_0}{2} H_1^2\right) dv \quad (2.166)$$

$$= \mathcal{d}W_m^c + dW_z^c \quad (2.167)$$

De geleverde arbeid (2.165) wordt hierbij opgedeeld in twee delen. Het deel $\int_{V_1} \mu_0 \bar{H} \cdot d\bar{M}_1 dv$ kan geïnterpreteerd worden als de volume-integraal van een toegevoerde energie per volume-eenheid. Het integrandum $\mu_0 \bar{H} \cdot d\bar{M}_1$ heeft immers een lokale betekenis omdat het bepaald wordt door de grootheden \bar{M}_1 en \bar{H} die in elk punt eenduidig bepaald zijn. Dit deel wordt dus door het magnetisch materiaal \bar{M}_1 opgenomen en wordt gegeven door:

$$\mathcal{d}W_m^c = \int_{V_1} \mu_0 \bar{H}_0 \cdot d\bar{M}_1 dv + \int_{V_1} \mu_0 \bar{H}_1 \cdot d\bar{M}_1 dv \quad (2.168)$$

$$= \int_{V_1} \mu_0 \bar{H} \cdot d\bar{M}_1 dv \quad (2.169)$$

$$= \int_{V_1} \vec{d}w_m^c dv \quad (2.170)$$

Het ander deel $\int_{V_\infty} d\left(\frac{\mu_0}{2}H_1^2\right) dv$ daarentegen heeft, net als de totale geleverde arbeid (2.165), een integrandum dat afhangt van de vorm van het afgezonderde volume V_1 , m.a.w. van de opsplitsing van het \vec{H} -veld in de deelvelden \vec{H}_0 en \vec{H}_1 . Dit deel van de toegevoerde energie wordt volgens (2.166) gegeven door de volgende uitdrukkingen:

$$dW_z^c = - \int_{V_1} \mu_0 \vec{H}_1 \cdot d\vec{M}_1 dv \quad (2.171)$$

$$= \int_{V_\infty} \mu_0 \vec{H}_1 \cdot d\vec{H}_1 dv = d \int_{V_\infty} \frac{\mu_0}{2} H_1^2 dv \quad (2.172)$$

In analogie met de zelfenergie van de stromen ($\int_{V_\infty} \frac{\mu_0}{2} H_{01}^2 dv$) kunnen we volgens (2.172) de energie W_z^c de zelfenergie van het magnetisch materiaal \vec{M}_1 noemen.

Dezelfde opdeling kan gemaakt worden voor de arbeid geleverd door de bronnen buiten V_2 bij een magnetisatieverandering $d\vec{M}_2$ binnen V_2 :

$$\int_{V_2} (\vec{H}_1 + \vec{H}_{01}) \cdot d\vec{M}_2 dv = \int_{V_2} \vec{H} \cdot d\vec{M}_2 dv + \int_{V_\infty} \mu_0 \vec{H}_{02} \cdot d\vec{H}_{02} dv \quad (2.173)$$

Op basis van vergelijkingen (2.161), (2.162), (2.157), (2.166) en (2.173) worden de energiestromen en hun opdelingen schematisch voorgesteld in Figuur 2.7. Tot slot kan men eenvoudig nagaan dat de som van de opgenomen energieën in deze figuur gelijk is aan de arbeid geleverd door de spanningsbronnen. Er geldt immers dat:

$$\begin{aligned} & \int_{V_\infty} (\mu_0 \vec{H}_{01} \cdot d\vec{H}_{01} + \mu_0 \vec{H}_1 \cdot d\vec{H}_1 + \mu_0 \vec{H}_{02} \cdot d\vec{H}_{02} + \mu_0 \vec{H}_{02} \cdot d\vec{H}_1 + \mu_0 \vec{H}_1 \cdot d\vec{H}_{02}) dv \quad (2.174) \\ &= \int_{V_\infty} \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{H} dv \\ &= \int_{V_\infty} d\left(\frac{\mu_0}{2} H^2\right) dv \end{aligned}$$

zodat de opgenomen energie inderdaad gelijk is aan $\vec{d}W_e$:

$$\int_{V_\infty} \frac{\mu_0}{2} H^2 dv + \int_{V_1} \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{M}_1 dv + \int_{V_2} \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{M}_2 dv \quad (2.175)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{V_\infty} d\left(\frac{\mu_0}{2} H^2\right) dv + \int_{V_\infty} \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{M} dv \\ &= \int_{V_\infty} \vec{H} \cdot d\vec{B} dv \\ &= \vec{d}W_e \quad (2.176) \end{aligned}$$

Als het \bar{H} -veld heringedeeld wordt in \bar{H}_J , opgewekt door de stromen \bar{J} , en \bar{H}_M , opgewekt door het magnetisch materiaal (\bar{M}_1 en \bar{M}_2 samen) kan de arbeid geleverd door de spanningsbronnen ook als volgt geschreven worden:

$$\bar{d}W_e = \int_{V_\infty} d\left(\frac{\mu_0}{2}H_J^2\right) dv + \int_{V_\infty} d\left(\frac{\mu_0}{2}H_M^2\right) dv + \int_{V_\infty} \mu_0\bar{H} \cdot d\bar{M} dv \quad (2.177)$$

De geleverde arbeid $\bar{d}W_e$ is dus gelijk aan de som van de zelfenergie van de stromen, de zelfenergie van het magnetische materiaal en de energie opgenomen door het magnetisch materiaal. De opdeling volgens (2.177) en de corresponderende definities van zelfenergie en energie opgenomen door het magnetisch materiaal zijn echter slechts formeel, omdat ze bepaald zijn door de tot hier toe gebruikte Chu-formulering (d.i. met \bar{H} als 'fundamenteel' veld). Met behulp van de Ampère-formulering bekommen we immers een andere opdeling. Steunende op $\mu_0\bar{H}_0 = \bar{B}_0$ in het volume V_1 kan de arbeid $\bar{d}W_{0 \rightarrow 1}$ als volgt uitgedrukt worden in functie van het \bar{B} -veld:

$$\bar{d}W_{0 \rightarrow 1} = \int_{V_1} \mu_0\bar{H}_0 \cdot d\bar{M}_1 dv \quad (2.178)$$

$$= \int_{V_1} \bar{B}_0 \cdot d\bar{M}_1 dv \quad (2.179)$$

$$= \int_{V_1} \bar{B}_0 \cdot d\bar{M}_1 dv + \int_{V_\infty} \bar{B}_1 \cdot d\bar{M}_1 dv - \int_{V_\infty} \frac{1}{\mu_0} \bar{B}_1 \cdot d\bar{B}_1 dv$$

$$= \int_{V_1} \bar{B} \cdot d\bar{M}_1 dv - \int_{V_\infty} d\left(\frac{1}{2\mu_0}B_1^2\right) dv \quad (2.180)$$

$$= \bar{d}W_m^a + dW_z^a \quad (2.181)$$

Hierbij kan nu $\bar{d}W_m^a = \int_{V_1} \bar{B} \cdot d\bar{M}_1 dv$ geïnterpreteerd kan worden als de volume-integraal van een door het magnetisch materiaal in V_1 opgenomen energie per volume-eenheid:

$$\bar{d}W_m^a = \int_{V_1} \bar{B} \cdot d\bar{M}_1 dv \quad (2.182)$$

$$= \int_{V_1} \bar{d}w_m^a dv \quad (2.183)$$

en $dW_z^a = - \int_{V_\infty} d\left(\frac{1}{2\mu_0}B_1^2\right) dv$ als de zelfenergie, die op het teken na analoog is aan de zelfenergie van de stromen.

De arbeid $\bar{d}W_e$ geleverd door de spanningsbronnen wordt dan als volgt opgesplitst:

$$\bar{d}W_e = \int_{V_\infty} d\left(\frac{1}{2\mu_0}B_J^2\right) dv - \int_{V_\infty} d\left(\frac{1}{2\mu_0}B_M^2\right) dv + \int_{V_\infty} \bar{B} \cdot d\bar{M} dv \quad (2.184)$$

en kan terug geformuleerd worden als de som van de zelfenergie van de stromen, de zelfenergie van het magnetische materiaal en de energie opgenomen door het magnetisch materiaal, die nu echter gedefinieerd zijn aan de hand van het \bar{B} -veld.

Bij niet-bewegende middenstoffen wordt de door de spanningsbronnen geleverde arbeid $\bar{d}W_e$ deels opgeslagen onder de vorm van een magnetische energiedichtheid en deels gedissipeerd door toedoen van irreversibele processen zoals hysteresis en dus omgezet in warmte. De variaties van de zelfenergieën, ongeacht Chu- of Ampère-formulering gegeven door respectievelijk (2.177) en (2.184), zijn steeds totale differentiaal en dragen dus enkel bij tot de opgeslagen energie. De (eventuele) dissipatie is dus bevat in de door het magnetisch materiaal opgenomen energie $\bar{d}w_m^c$ of $\bar{d}w_m^a$. Het verschil tussen beide laatste kan geschreven worden als de variatie van een opgeslagen energiedichtheid (d.i. als een totale differentiaal):

$$\begin{aligned}\bar{d}w_m^a - \bar{d}w_m^c &= \bar{B} \cdot d\bar{M}_1 - \mu_0 \bar{H} \cdot d\bar{M}_1 \\ &= \mu_0 \bar{M}_1 \cdot d\bar{M}_1 \\ &= d\left(\frac{\mu_0}{2} M_1^2\right)\end{aligned}\tag{2.185}$$

zodat beide definities van de door de het materiaal opgenomen energie inderdaad dezelfde gedissipeerde energie bevatten.

2.5.2 Beschrijving van bewegende middenstoffen

Om uiteindelijk tot een behandeling van bewegende gemagnetiseerde middenstoffen te kunnen komen, wordt in deze paragraaf uiteengezet hoe de beweging en de daaruit afgeleide grootheden worden beschreven.

2.5.2.1 Verplaatsing, vervorming en rotatie

Het uitgangspunt is de verplaatsing $\bar{u}(\bar{r})$ in ieder punt van het beschouwde lichaam of in een cartesiaans assenstelsel $\bar{u}(x, y, z)$. We nemen nu aan dat de rekken voldoende klein zijn zodat eerstegraadstermen in de eerste ruimtelijke afgeleiden van de verplaatsing (m.a.w. de Jacobiaan $\bar{\nabla}\bar{u}$) volstaan voor het beschrijven van de lokale vervorming (de rekken) en van de rotatie. De Jacobiaanse matrix wordt nu opgesplitst in een symmetrisch en een antisymmetrisch deel:

$$\begin{aligned}[u'] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \theta_z & -\theta_y \\ -\theta_z & 0 & \theta_x \\ \theta_y & -\theta_x & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{2.186}$$

met

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad ; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad ; \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \quad ; \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)$$

en

$$\theta_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \quad ; \quad \theta_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad ; \quad \theta_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

De rektensor is dus het symmetrisch deel van de Jacobiaan $\bar{\nabla}\bar{u}$:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[(\bar{\nabla}\bar{u}) + (\bar{\nabla}\bar{u})^\top \right] = (\bar{\nabla}\bar{u})^s \quad (2.187)$$

terwijl de rotatie $\bar{\theta}$ bepaald wordt door het antisymmetrisch deel en gelijk is aan de helft van de rotor van \bar{u} :

$$\bar{\theta} = \frac{1}{2} \bar{\nabla} \times \bar{u} \quad (2.188)$$

De relatieve volumetoename tenslotte wordt gegeven door de som van de diagonaalelementen van de rektensor :

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \bar{\nabla} \cdot \bar{u} \quad (2.189)$$

2.5.2.2 Variaties t.o.v. meebewegende waarnemer

Bij bewegende middenstoffen kan men de variatie van een grootheid beschouwen ten opzichte van een vast assenstelsel of ten opzichte van een meebewegend assenstelsel. Het verband tussen de variatie van (bijvoorbeeld) de magnetisatie geobserveerd door een stilstaande waarnemer, $d\bar{M}$, en die waargenomen door een waarnemer die zowel de verplaatsing als de rotatie volgt, $d_m\bar{M}$, wordt gegeven door :

$$d\bar{M} = d_m\bar{M} - d\bar{u} \cdot \bar{\nabla}\bar{M} + d\bar{\theta} \times \bar{M} \quad (2.190)$$

2.5.3 Arbeid en energie in bewegend gemagnetiseerd materiaal

Wanneer men zowel de variatie van de magnetisatie als beweging in aanmerking neemt zal de door het magnetisch materiaal opgenomen energie dW_m^c niet alleen opgeslagen worden als inwendige energie en gedissipeerd worden, zoals bij niet-bewegende middenstoffen, maar ook deels omgezet worden in mechanische energie, nl. als arbeid geleverd aan de uitwendige krachten \bar{f}_u en \bar{T}_u en als kinetische energie.

Het uitgangspunt is terug de arbeid geleverd door de bronnen buiten V_1 aan het magnetisch materiaal binnen V_1 die gegeven wordt door ³:

$$dW_{0 \rightarrow 1} = \int_{V_1} \mu_0 \bar{H}_0 \cdot d\bar{M} \, dv \quad (2.191)$$

De toegevoerde arbeid wordt terug opgesplitst in een deel opgenomen door het magnetisch materiaal en de zgn. zelfenergie dW_z^c , die volgens (2.171) gegeven wordt door:

$$dW_z^c = - \int_{V_1^+} \mu_0 \bar{H}_1 \cdot d\bar{M} \, dv \quad (2.192)$$

Merk op dat het hierbij nodig is te integreren over V_1^+ omdat het oppervlak S_1 zich kan verplaatsen.

De door het materiaal opgenomen energie geleverd door de magnetische bronnen wordt bijgevolg gegeven door :

$$dW_m^c = dW_{0 \rightarrow 1} - dW_z^c \quad (2.193)$$

$$= \int_{V_1^+} \mu_0 \bar{H} \cdot d\bar{M} \, dv \quad (2.194)$$

$$= \int_{V_1} \mu_0 \bar{H} \cdot (d_m \bar{M} - d\bar{u} \cdot \bar{\nabla} \bar{M} + d\bar{\theta} \times \bar{M}) \, dv \quad (2.195)$$

waarbij we overgegaan zijn op variaties t.o.v. een meebewegende waarnemer volgens (2.190).

Door de vervorming kan ook de massadichtheid ϱ , en dus de hoeveelheid magnetisch materiaal per volume-eenheid, veranderen. Voor een waarnemer die de beweging van het materiaal volgt, is het bijgevolg meer voor de hand liggend de arbeid geleverd aan het magnetisch materiaal uit te drukken per massa-eenheid (d.i. per hoeveelheid magnetisch materiaal) i.p.v. per volume-eenheid, en de magnetisatie te beschrijven door middel van het magnetisch moment per massa-eenheid $\mu_0 \bar{M}_s$ gegeven door

$$\mu_0 \bar{M}_s = \frac{\mu_0 \bar{M}}{\varrho} \quad (2.196)$$

De term $d_m \bar{M} \, dv$ in vergelijking (2.195) wordt bijgevolg als volgt omgerekend:

$$\begin{aligned} d_m \bar{M} \, dv &= d_m (\varrho \bar{M}_s) \, dv \\ &= \varrho d_m \bar{M}_s \, dv + \bar{M}_s d_m \varrho \, dv \\ &= d_m \bar{M}_s \, dm - \bar{M}_s \varrho \bar{\nabla} \cdot d\bar{u} \, dv \\ &= d_m \bar{M}_s \, dm - \bar{M} \bar{\nabla} \cdot d\bar{u} \, dv \end{aligned} \quad (2.197)$$

waarbij gebruik wordt gemaakt van de wet van massabehoud

$$\frac{d_m \varrho}{\varrho} + \bar{\nabla} \cdot d\bar{u} = 0 \quad (2.198)$$

De tweede term van het integrandum van (2.195) kan, met inachtneming van het stroomvrij zijn van het magnetisch materiaal ($\bar{J} = \bar{\nabla} \times \bar{H} = 0$ in V_1), met behulp van de volgende betrekking

³Omdat vanaf hier nog enkel het magnetisch materiaal binnen V_1 wordt beschouwd, wordt de index '1' van \bar{M}_1 verder weggelaten.

uitgewerkt worden:

$$\begin{aligned}
\vec{H} \cdot d\vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \vec{M}) &= d\vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \vec{M}) \cdot \vec{H} \\
&= d\vec{u} \cdot \vec{\nabla} (\vec{M} \cdot \vec{H}) - d\vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \vec{H}) \cdot \vec{M} \\
&= d\vec{u} \cdot \vec{\nabla} (\vec{M} \cdot \vec{H}) - d\vec{u} \cdot (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \vec{H} - d\vec{u} \cdot \vec{M} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \\
&= d\vec{u} \cdot \vec{\nabla} (\vec{M} \cdot \vec{H}) - d\vec{u} \cdot (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \vec{H}
\end{aligned} \tag{2.199}$$

De door de magnetische bronnen geleverde arbeid die het magnetisch materiaal in V_1 opneemt kan aldus als volgt geschreven worden:

$$\begin{aligned}
dW_m^c &= \int_{V_1^+} \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{M} \, dv \\
&= \int_{V_1^+} \mu_0 \vec{H} \cdot d_m \vec{M}_s \, dm - \int_{V_1^+} [\mu_0 \vec{H} \cdot \vec{M} \vec{\nabla} \cdot d\vec{u} + d\vec{u} \cdot \vec{\nabla} (\vec{M} \cdot \mu_0 \vec{H})] \, dv \\
&\quad + \int_{V_1^+} [d\vec{u} \cdot (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{\theta} \times \vec{M}] \, dv
\end{aligned} \tag{2.200}$$

De tweede term van het rechterlid van (2.200) verdwijnt omdat de magnetisatie ter hoogte van S_1^+ nul is, nl. :

$$\begin{aligned}
&\int_{V_1^+} [\mu_0 \vec{H} \cdot \vec{M} \vec{\nabla} \cdot d\vec{u} + d\vec{u} \cdot \vec{\nabla} (\vec{M} \cdot \mu_0 \vec{H})] \, dv \\
&= \int_{V_1^+} \vec{\nabla} \cdot (\mu_0 \vec{H} \cdot \vec{M} \, d\vec{u}) \, dv \\
&= \oint_{S_1^+} \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{M} \, d\vec{u} \, ds \\
&= 0
\end{aligned}$$

zodat men de volgende uitdrukking voor dW_m^c bekomt:

$$dW_m^c = \int_{V_1^+} \mu_0 \vec{H} \cdot d_m \vec{M}_s \, dm + \int_{V_1^+} [d\vec{u} \cdot (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \mu_0 \vec{H} + (\vec{M} \times \mu_0 \vec{H}) \cdot d\vec{\theta}] \, dv \tag{2.201}$$

$$= \int_{V_1^+} \mu_0 \vec{H} \cdot d_m \vec{M}_s \, dm + \int_{V_1^+} (d\vec{u} \cdot \vec{f}_c + \vec{c}_c \cdot d\vec{\theta}) \, dv \tag{2.202}$$

In deze uitdrukking komt de fictieve krachtdichtheid $\vec{f}_c = \vec{M} \cdot \vec{\nabla} \mu_0 \vec{H}$ voor die ter hoogte van S_1 een singulariteit vertoont, nl. $\vec{T}_c(\vec{n}) = \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \vec{n}$, m.a.w. :

$$\int_{V_1^+} \vec{f}_c \cdot d\vec{u} \, dv = \int_{V_1} \vec{f}_c \cdot d\vec{u} \, dv + \oint_{S_1} \vec{T}_c(\vec{n}) \cdot d\vec{u} \, ds \tag{2.203}$$

Het deel van de langs magnetische weg geleverde arbeid dat door het magnetisch materiaal wordt opgenomen wordt aldus gegeven door:

$$dW_m^c = dW_{0 \rightarrow 1} - dW_z^c \quad (2.204)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{V_1} \mu_0 \bar{H} \cdot d_m \bar{M}_s \, dm \\ &\quad + \int_{V_1} \bar{f}_c \cdot d\bar{u} \, dv + \oint_{S_1} \bar{T}_c(\bar{n}) \cdot d\bar{u} \, ds + \int_{V_1} \bar{c}_c \cdot d\bar{\theta} \, dv \end{aligned} \quad (2.205)$$

We merken terloops op dat op basis van deze uitdrukking voor dW_m^c het principe van de virtuele arbeid voor het bepalen van de totale kracht en het totaal moment uitgeoefend op een magnetisch lichaam kan bewezen worden zoals in Appendix C wordt aangetoond.

Naast de arbeid $dW_{0 \rightarrow 1}$, toegevoerd via het magnetisch veldsysteem, wordt er bij beweging arbeid geleverd of opgenomen door de krachtdichtheid \bar{f}_u in het materiaal en de spanningen \bar{T}_u op het oppervlak. Met behulp van de vergelijkingen (2.138) en (2.140) kan de arbeid opgenomen door de uitwendige krachten dW_u geschreven worden in functie van de spanningen $\bar{\tau}_c$ en de magnetische langeafstandskrachten, bepaald door \bar{f}_c en $\bar{T}_c(\bar{n})$:

$$\begin{aligned} -dW_u &= \int_{V_1} \rho \bar{f}_u \cdot d\bar{u} \, dv + \oint_{S_1} \bar{T}_u \cdot d\bar{u} \, ds \\ &= \int_{V_1} (\rho \bar{a} - \bar{\nabla} \cdot \bar{\tau}_c - \bar{f}_c) \cdot d\bar{u} \, dv + \oint_{S_1} (\bar{n} \cdot \bar{\tau}_c - \bar{T}_c(\bar{n})) \cdot d\bar{u} \, ds \\ &= \int_{V_1} \left[\rho \bar{a} \cdot d\bar{u} - (\bar{\nabla} \cdot \bar{T}_c) \cdot d\bar{u} - (\bar{\nabla} \cdot \bar{\tau}_c) \cdot d\bar{u} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\tau}_c \cdot d\bar{u}) \right] dv \\ &\quad - \oint_{S_1} \bar{T}_c(\bar{n}) \cdot d\bar{u} \, ds \\ &= dE_{kin} - \int_{V_1} \bar{f}_c \cdot d\bar{u} \, dv - \oint_{S_1} \bar{T}_c(\bar{n}) \cdot d\bar{u} \, ds + \int_{V_1} \bar{\tau}_c \cdot \bar{\nabla} \cdot d\bar{u} \, dv \end{aligned} \quad (2.206)$$

waarbij $dE_{kin} = \int_{V_1} \rho \bar{a} \cdot d\bar{u} \, dv$ de variatie van de kinetische energie is.

De term $\int_{V_1} \bar{\tau}_c \cdot \bar{\nabla} \cdot d\bar{u} \, dv$ kan uitgedrukt worden in functie van de rektensor $d\bar{\varepsilon}$ en de rotatie $d\bar{\theta}$. Daartoe splitsen we, in analogie met de Jacobiaan van de verplaatsing $\bar{\nabla} d\bar{u}$, de spanningstensor $\bar{\tau}_c$ op in een symmetrisch en een antisymmetrisch deel:

$$\bar{\tau}_c = \frac{1}{2} (\bar{\tau}_c + \bar{\tau}_c^T) + \frac{1}{2} (\bar{\tau}_c - \bar{\tau}_c^T) \quad (2.207)$$

$$= \bar{\tau}_c^s + \bar{\tau}_c^{as} \quad (2.208)$$

De bijdrage van het symmetrisch deel van $\bar{\tau}_c$ wordt gegeven door⁴:

$$\bar{\tau}_c^s \cdot \bar{\nabla} \cdot d\bar{u} = \tau_{xx}^c d\varepsilon_{xx} + \tau_{yy}^c d\varepsilon_{yy} + \tau_{zz}^c d\varepsilon_{zz}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\tau_{xy}^c + \tau_{yx}^c \right) d\varepsilon_{xy} + \left(\tau_{yz}^c + \tau_{zy}^c \right) d\varepsilon_{yz} + \left(\tau_{zx}^c + \tau_{xz}^c \right) d\varepsilon_{zx} \\
= & \bar{\tau}_c^s : d\bar{\varepsilon}
\end{aligned} \tag{2.209}$$

Gebruik makend van (2.135), bekomt men de bijdrage van het antisymmetrisch deel:

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}_c^{as} \cdot \bar{\nabla} \cdot d\bar{u} & = -\frac{\mu_0}{2} (\bar{M}\bar{H} - \bar{H}\bar{M}) \cdot \bar{\nabla} \cdot d\bar{u} \\
& = -\mu_0 (\bar{M} \times \bar{H}) \cdot \frac{1}{2} (\bar{\nabla} \times d\bar{u}) \\
& = -\bar{c}_c \cdot d\bar{\theta}
\end{aligned} \tag{2.210}$$

De arbeid opgenomen door de uitwendige krachten \bar{f}_u en spanningen \bar{T}_u aangevuld met de verandering van de kinetische energie vormt het deel van $\bar{\mathcal{W}}_m^c$ dat in mechanische energie wordt omgezet en wordt volgens (2.206), (2.209) en (2.210) gegeven door:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{W}}_u + dE_{kin} & = \int_{V_1} \bar{f}_c \cdot d\bar{u} \, dv + \oint_{S_1} \bar{T}_c(\bar{n}) \cdot d\bar{u} \, ds + \int_{V_1} \bar{c}_c \cdot d\bar{\theta} \, dv \\
& \quad - \int_{V_1} \bar{\tau}_c^s : d\bar{\varepsilon} \, dv
\end{aligned} \tag{2.211}$$

Uit (2.205) en (2.211) volgt dat de magnetisch toegevoerde arbeid $\bar{\mathcal{W}}_m^c$ als volgt wordt omgezet:

$$\bar{\mathcal{W}}_m^c = \int_{V_1} \mu_0 \bar{H} \cdot d_m \bar{M}_s \, dm + \int_{V_1} \bar{\tau}_c^s : d\bar{\varepsilon} \, dv + \bar{\mathcal{W}}_u + dE_{kin} \tag{2.212}$$

De (als arbeid) aangevoerde energie $\bar{\mathcal{W}}_m^c$ wordt enerzijds in mechanische energie omgezet ($\bar{\mathcal{W}}_u + dE_{kin}$) en anderzijds opgeslagen als inwendige energie dU_{inw}^c en door irreversibele processen (zoals hysteresis) omgezet in warmte $\bar{\mathcal{Q}}$. De variatie van de inwendige energie en de dissipatie worden volgens (2.212) gegeven door:

$$dU_{inw}^c + \bar{\mathcal{Q}} = \int_{V_1} \mu_0 \bar{H} \cdot d_m \bar{M}_s \, dm + \int_{V_1} \bar{\tau}_c^s : d\bar{\varepsilon} \, dv \tag{2.213}$$

$$= \int_{V_1} \left(\mu_0 \bar{H} \cdot d_m \bar{M}_s + \frac{1}{\varrho} \bar{\tau}_c^s : d\bar{\varepsilon} \right) dm \tag{2.214}$$

Aangezien de integranda van deze vergelijking enkel afhangen van lokale grootheden, kan men de opgeslagen energie en de dissipatie per massa-eenheid als volgt uitdrukken:

$$du_{inw}^c + \bar{\mathcal{q}} = \mu_0 \bar{H} \cdot d_m \bar{M}_s + \frac{1}{\varrho} \bar{\tau}_c^s : d\bar{\varepsilon} \tag{2.215}$$

zodat bij reversibele processen ($\bar{\mathcal{q}} = 0$) de variatie van de opgeslagen energie gegeven wordt door:

$$du_{inw}^c = \mu_0 \bar{H} \cdot d_m \bar{M}_s + \frac{1}{\varrho} \bar{\tau}_c^s : d\bar{\varepsilon} \tag{2.216}$$

⁴De hier gebruikte notatie $\bar{\tau}_c^s : d\bar{\varepsilon}$ wordt verder toegelicht in Appendix B.

2.5.4 Inwendige energie en constitutieve wetten in elastisch gemagnetiseerd materiaal

2.5.4.1 Inwendige energie

Bij materialen die noch magnetische noch mechanische hysteresis vertonen is er geen dissipatie en wordt de lokaal opgenomen energie opgeslagen als inwendige energie. De toestand van het materiaal, o.a. de inwendige energie, wordt volledig gekenmerkt door de ogenblikkelijke magnetisatie en vervorming, onafhankelijk van de manier waarop de magnetisatie en vervorming bereikt zijn (m.a.w. onafhankelijk van de 'voorgeschiedenis'):

$$u_{inw}^c = u_{inw}^c(\bar{M}_s, \bar{\epsilon}) \quad (2.217)$$

Op basis van de opgeslagen energie (2.216) bij een variatie van de magnetisatie ($d\bar{M}_s$) en de vervorming ($d\bar{\epsilon}$), bij $\dot{d}q = 0$, wordt nu de algemene vorm van de inwendige energiedichtheid u_{inw}^c afgeleid.

Verder worden de voorwaarden afgeleid waaraan het gedrag van het materiaal bij magnetisatie en vervorming moet voldoen opdat de lokaal opgenomen energie $\dot{d}w^c$ kan geschreven worden als de totale differentiaal van een grootte (met name van de inwendige energie), m.a.w. als het materiaal geen irreversibele processen doorloopt. Dit leidt tot een algemene vorm voor de constitutieve wetten die het \bar{H} -veld en de spanningstensor $\bar{\tau}_c^s$ uitdrukken in functie van de magnetisatie \bar{M}_s en de vervorming $\bar{\epsilon}$.

We gaan hierbij uit van een materiaal in neutrale toestand ($\bar{M}_s=0$ en $\bar{\epsilon} = 0$). Als we ten eerste de magnetisatie \bar{M}_s laten variëren terwijl de vervorming constant (nl. $\bar{\epsilon} = 0$) wordt gehouden (waarbij evenwel een beweging als star lichaam is toegelaten) wordt de opgeslagen energie volgens (2.216) gegeven door:

$$du_{inw}^c \Big|_{\bar{\epsilon}=0} = \mu_0 \bar{H} \cdot d_m \bar{M}_s \quad (2.218)$$

Omdat de variatie $d_m \bar{M}_s$ uitgedrukt is ten opzichte van een meebewegende waarnemer, kan men gebruik maken van de constitutieve wet die het verband tussen \bar{M}_s en \bar{H} weergeeft bij $\bar{\epsilon} = 0$.

In het geval van niet-hysteretisch materiaal is er een éénduidig verband tussen \bar{H} en \bar{M}_s , dat in de volgende algemene vorm kan geschreven worden:

$$\bar{M}_s = \bar{\chi}(\bar{H}) \cdot \bar{H} \quad (2.219)$$

en

$$d_m \bar{M}_s = \bar{\chi}_d(\bar{H}) \cdot d\bar{H} \quad (2.220)$$

waarbij de tensoren $\bar{\chi}(\bar{H})$ en $\bar{\chi}_d(\bar{H})$ respectievelijk de susceptibiliteit en de differentiële susceptibiliteit worden genoemd.

In appendix D wordt aangetoond dat de lokaal opgenomen energie $\mu_0 \bar{H} \cdot d_m \bar{M}_s$ een totale differentiaal vormt als en slechts als de differentiële susceptibiliteit $\bar{\chi}_d$ symmetrisch is:

$$\mu_0 \bar{H} \cdot d_m \bar{M}_s = du_{mag}^c \Leftrightarrow \bar{\chi}_d \text{ is symmetrisch} \quad (2.221)$$

De voorwaarde dat $\bar{\chi}_d$ symmetrisch moet zijn betekent dus dat in een cartesiaans assenstelsel, de constitutieve wetten voor de componenten van \bar{M}_s , nl. M_{sx} , M_{sy} en M_{sz} , in functie van de componenten van \bar{H} , niet onafhankelijk van elkaar zijn maar gebonden zijn door de volgende symmetrievorwaarden:

$$\frac{\partial M_{sx}}{\partial H_y} = \frac{\partial M_{sy}}{\partial H_x} \quad ; \quad \frac{\partial M_{sx}}{\partial H_z} = \frac{\partial M_{sz}}{\partial H_x} \quad ; \quad \frac{\partial M_{sy}}{\partial H_z} = \frac{\partial M_{sz}}{\partial H_y} \quad (2.222)$$

De corresponderende energiedichtheid u_{mag} , d.i. de energiedichtheid in onvervormde toestand $\bar{\varepsilon} = 0$, is enkel functie van de magnetisatie \bar{M}_s (of, wegens het éénduidig verband, van de magnetische veldsterkte \bar{H}) en kunnen we bijgevolg de 'magnetische energiedichtheid' noemen:

$$u_{mag}^c = u_{mag}^c(\bar{M}_s) = \int_0^{\bar{H}} \mu_0 \bar{H}' \cdot \bar{\chi}_d(\bar{H}') \cdot d\bar{H}' \quad (2.223)$$

Uit

$$\mu_0 \bar{H} \cdot d_m \bar{M}_s = du_{mag}^c(\bar{M}_s) \quad (2.224)$$

volgt dat het veld $\bar{H}^0(\bar{M}_s)$, gedefinieerd als het \bar{H} -veld bij een magnetisatie \bar{M}_s en in onvervormde toestand, gegeven wordt door:

$$\bar{H}^0(\bar{M}_s) = \frac{1}{\mu_0} \frac{du_{mag}^c(\bar{M}_s)}{d\bar{M}_s} \quad (2.225)$$

waarbij de afgeleide naar een vectoriële grootheid $\bar{M}_s = M_{sx}\bar{e}_x + M_{sy}\bar{e}_y + M_{sz}\bar{e}_z$ gedefinieerd is als:

$$\frac{d}{d\bar{M}_s} = \bar{e}_x \frac{d}{dM_{sx}} + \bar{e}_y \frac{d}{dM_{sy}} + \bar{e}_z \frac{d}{dM_{sz}} \quad (2.226)$$

Ten tweede laat men de vervorming $\bar{\varepsilon}$ variëren bij constante \bar{M}_s . We nemen hierbij aan dat de relatieve volumeverandering voldoende klein is, zodat de massadichtheid en dus ook \bar{M} ($= \varrho \bar{M}_s$) constant mag verondersteld worden. Bij kleine rekken ($\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \ll 1$) geldt inderdaad:

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{1 + (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})} \approx \varrho_0 \quad (2.227)$$

waarbij ϱ_0 de massadichtheid bij $\bar{\varepsilon} = 0$ voorstelt.

De opgenomen energie per massa-eenheid bij een variatie van de rekken bij constante \bar{M}_s wordt bij reversibele processen volgens (2.215) en (2.227) (benaderend) gegeven door:

$$du_{inw}^c \Big|_{\bar{M}_s = \text{cst.}} = \frac{1}{\varrho_0} \bar{\tau}_c^s : d\bar{\varepsilon} \quad (2.228)$$

Volgens (2.130) wordt de spanningstensor $\bar{\tau}_c$ als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned}\bar{n} \cdot \bar{\tau}_c &= \bar{\tau}(\bar{n}) + \bar{T}_c(\bar{n}) \\ &= \bar{\tau}(\bar{n}) + \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n}\end{aligned}\quad (2.229)$$

waarbij het symmetrisch deel van $\bar{\tau}_c$ wegens de koppelvergelijking (2.135) gegeven is door

$$\bar{\tau}_c^s = \bar{\tau}_c + \frac{\mu_0}{2} (\bar{M}\bar{H} - \bar{H}\bar{M}) \quad (2.230)$$

Beschouwen we vooreerst het bijzonder geval waarbij er geen magnetisatie optreedt ($\bar{M} = 0$). In dit geval herleidt $\bar{\tau}_c$ zich tot de klassieke symmetrische mechanische spanningstensor. Voor niet gemagnetiseerd, elastisch materiaal wordt het verband tussen de spanningstensor $\bar{\tau}_c^s$ en de rektensor $\bar{\varepsilon}$ gegeven door de wet van Hooke. Deze lineaire betrekking tussen de spanningstensor en de rektensor kan als volgt genoteerd worden⁵:

$$\bar{\tau}_c^s = \bar{\varepsilon} : \bar{E} \quad (2.231)$$

De arbeid $\bar{\tau}_c^s : d\bar{\varepsilon}$ wordt in dit geval volledig omgezet in elastische energie u_{el}^c :

$$\left. d^*u_{inw}^c \right|_{\bar{M}_s=0} = \frac{1}{\varrho_0} \bar{\varepsilon} : \bar{E} : d\bar{\varepsilon} \quad (2.232)$$

$$= d \left(\frac{1}{2\varrho_0} \bar{\varepsilon} : \bar{E} : \bar{\varepsilon} \right) \quad (2.233)$$

$$= du_{el}^c(\bar{\varepsilon}) \quad (2.234)$$

Als het materiaal echter gemagnetiseerd is, hangt de tensor $\bar{\tau}_c^s$ wegens de term $\frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n}$ in (2.229) ook af van de magnetisatie \bar{M} . Bovendien zijn de spanningen $\bar{\tau}(\bar{n})$ niet noodzakelijk van puur mechanische aard maar kunnen zij ook deels van magnetische oorsprong zijn (magnetische kortefstandskrachten). De tensor $\bar{\tau}_c^s$ bestaat bijgevolg uit enerzijds de elastische spanningstensor $\bar{\varepsilon} : \bar{E}$ en anderzijds een tensor die afhangt van de magnetisatie \bar{M} (en dus van \bar{M}_s), zodat $\bar{\tau}_c^s$ onder de volgende algemene vorm kan geschreven worden:

$$\bar{\tau}_c^s = \bar{\varepsilon} : \bar{E} + \bar{\alpha}_c(\bar{M}_s) \quad (2.235)$$

waarbij zowel $\bar{\varepsilon} : \bar{E}$ als $\bar{\alpha}_c(\bar{M}_s)$ symmetrische tensoren zijn.

De bijdrage van het magnetisatie-afhankelijk deel van de spanningstensor $\bar{\tau}_c^s$ tot de variatie van de inwendige energiedichtheid bij een variatie van de rek $d\bar{\varepsilon}$ bij constante \bar{M}_s kan men de 'magnetostrictie-energie' u_{mstr}^c noemen omdat het een verband tussen de magnetische en elastische verschijnselen weerspiegelt, en wordt gegeven door:

$$\frac{1}{\varrho_0} \bar{\alpha}_c(\bar{M}_s) : d\bar{\varepsilon} = d \left(\frac{1}{\varrho_0} \bar{\alpha}_c(\bar{M}_s) : \bar{\varepsilon} \right) \quad (2.236)$$

$$= d(u_{mstr}^c(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon})) \quad (2.237)$$

⁵Voor een verdere toelichting van deze notatie verwijzen we naar Appendix B

De totale inwendige energiedichtheid is de som van de drie hierboven gedefinieerde energiedichtheden:

$$u_{inw}^c(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon}) = u_{mag}^c(\bar{M}_s) + u_{mstr}^c(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon}) + u_{el}^c(\bar{\varepsilon}) \quad (2.238)$$

$$= u_{mag}^c(\bar{M}_s) + \frac{1}{\rho_0} \bar{\alpha}_c(\bar{M}_s) : \bar{\varepsilon} + \frac{1}{2\rho_0} \bar{\varepsilon} : \bar{E} : \bar{\varepsilon} \quad (2.239)$$

De inwendige energie wordt aldus formeel ingedeeld in de magnetische energie, die enkel functie is van \bar{M}_s , de magnetostrictie-energie, bestaande uit eerstegraadstermen in de rekken met coëfficiënten afhankelijk van \bar{M}_s en de elastische energie gevormd door termen van de tweede graad in de rekken.

Een alternatieve formulering, die bijvoorbeeld in [Hirsinger 95] gebruikt wordt, kan als volgt afgeleid worden. De inwendige energie wordt onderverdeeld in:

1. de magnetische energie $\tilde{u}_{mag}^c(\bar{M}_s)$, die opnieuw enkel functie is van \bar{M}_s .
2. de elastische energie \tilde{u}_{el}^c . De totale rektensor $\bar{\varepsilon}$ wordt hierbij onderverdeeld in twee delen. Ten eerste is er een 'spontane' vervorming ten gevolge van magnetostrictie $\bar{\varepsilon}_{mstr}^c(\bar{M}_s)$, d.i. de rek van gemagnetiseerd materiaal in 'spanningsloze toestand'. Ten tweede is er een rek $\bar{\varepsilon}_{mech}^c$ ten gevolge van de 'mechanische spanningen' $\bar{\sigma}_{mech}$. Het verband tussen deze mechanische rek en mechanische spanningen wordt gegeven door de wet van Hooke:

$$\bar{\sigma}_{mech} = \bar{\varepsilon}_{mech}^c = \bar{\varepsilon}_{mech}^c : \bar{E} \quad (2.240)$$

met

$$\bar{\varepsilon}_{mech}^c = \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_{mstr}^c(\bar{M}_s) \quad (2.241)$$

De elastische energie wordt enkel bepaald door de mechanische rek en wordt bijgevolg gegeven door:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{el}^c(\bar{\varepsilon}_{mech}^c) &= \frac{1}{2\rho_0} \bar{\sigma}_{mech} : \bar{\varepsilon}_{mech}^c \\ &= \frac{1}{2\rho_0} \bar{\varepsilon}_{mech}^c : \bar{E} : \bar{\varepsilon}_{mech}^c \\ &= \frac{1}{2\rho_0} (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_{mstr}^c) : \bar{E} : (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_{mstr}^c) \end{aligned} \quad (2.242)$$

Zoals verder zal blijken, komt de 'mechanische spanning' van deze redenering overeen met de symmetrische spanningstensor $\bar{\tau}_c^s$ en wordt dus met 'spanningsloze toestand' bedoeld dat de tensor $\bar{\tau}_c^s$ nul is.

De som van de magnetische energie \tilde{u}_{mag}^c en de elastische energie \tilde{u}_{el}^c kan omgevormd worden tot dezelfde vorm als de uitdrukking (2.239) voor de inwendige energie:

$$\tilde{u}_{inw}^c(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon}) = \tilde{u}_{mag}^c(\bar{M}_s) + \tilde{u}_{el}^c(\bar{\varepsilon}_{mech}^c)$$

$$= \tilde{u}_{mag}^c(\bar{M}_s) + \frac{1}{2\rho_0} (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_{mstr}^c(\bar{M}_s)) : \bar{E} : (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_{mstr}^c(\bar{M}_s)) \quad (2.243)$$

$$\begin{aligned} &= \tilde{u}_{mag}^c(\bar{M}_s) \\ &\quad + \frac{1}{2\rho_0} \left[\bar{\varepsilon} : \bar{E} : \bar{\varepsilon} - 2 \bar{\varepsilon}_{mstr}^c(\bar{M}_s) : \bar{E} : \bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}_{mstr}^c(\bar{M}_s) : \bar{E} : \bar{\varepsilon}_{mstr}^c(\bar{M}_s) \right] \\ &= \tilde{u}_{mag}^c(\bar{M}_s) + \frac{1}{2\rho_0} \bar{\varepsilon}_{mstr}^c(\bar{M}_s) : \bar{E} : \bar{\varepsilon}_{mstr}^c(\bar{M}_s) \\ &\quad - \frac{1}{\rho_0} \bar{\varepsilon}_{mstr}^c(\bar{M}_s) : \bar{E} : \bar{\varepsilon} \\ &\quad + \frac{1}{2\rho_0} \bar{\varepsilon} : \bar{E} : \bar{\varepsilon} \end{aligned} \quad (2.244)$$

Gelijkstelling van u_{inw}^c (2.239) en \tilde{u}_{inw}^c (2.244) levert het volgend verband op tussen u_{mag}^c en $\bar{\alpha}_c$ enerzijds en \tilde{u}_{mag}^c en $\bar{\varepsilon}_{mstr}^c$ anderzijds:

$$u_{mag}^c(\bar{M}_s) = \tilde{u}_{mag}^c(\bar{M}_s) + \frac{1}{2\rho_0} \bar{\varepsilon}_{mstr}^c(\bar{M}_s) : \bar{E} : \bar{\varepsilon}_{mstr}^c(\bar{M}_s) \quad (2.245)$$

$$\bar{\alpha}_c(\bar{M}_s) = -\bar{\varepsilon}_{mstr}^c(\bar{M}_s) : \bar{E} \quad (2.246)$$

2.5.4.2 Constitutieve wetten

Samenvattend kunnen we besluiten dat bij reversibele processen ($\vec{d}q = 0$) de variatie van de inwendige energie volgens (2.215) gegeven wordt door:

$$du_{inw}^c = \mu_0 \bar{H} \cdot d_m \bar{M}_s + \frac{1}{\rho} \bar{\tau}_c^s : d\bar{\varepsilon} \quad (2.247)$$

waarbij de inwendige energie kan geschreven worden als een functie van \bar{M}_s en $\bar{\varepsilon}$ van de volgende vorm:

$$\begin{aligned} u_{inw}^c(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon}) &= u_{mag}^c(\bar{M}_s) + u_{mstr}^c(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon}) + u_{el}^c(\bar{\varepsilon}) \\ &= u_{mag}^c(\bar{M}_s) + \frac{1}{\rho_0} \bar{\alpha}_c(\bar{M}_s) : \bar{\varepsilon} + \frac{1}{2\rho_0} \bar{\varepsilon} : \bar{E} : \bar{\varepsilon} \end{aligned} \quad (2.248)$$

met

$$\frac{du_{mag}^c(\bar{M}_s)}{d\bar{M}_s} = \mu_0 \bar{H}^0(\bar{M}_s) \quad (2.249)$$

Uit (2.247) en (2.248) volgt ten eerste de constitutieve wet die \bar{H} uitdrukt als functie van \bar{M}_s en $\bar{\varepsilon}$:

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial u_{inw}^c(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{M}_s} = \bar{H}_c(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon}) \quad (2.250)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{du_{mag}^c(\bar{M}_s)}{d\bar{M}_s} + \frac{\partial u_{mstr}^c(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{M}_s} \right) \\ &= \bar{H}^0(\bar{M}_s) + \frac{1}{\rho_0 \mu_0} \frac{d\bar{\alpha}_c(\bar{M}_s)}{d\bar{M}_s} : \bar{\varepsilon} \end{aligned} \quad (2.251)$$

Als we de afgeleiden naar een tensor $\bar{\varepsilon}$ op de volgende manier definiëren:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\varepsilon}} = \bar{e}_x \bar{e}_x \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{xx}} + \bar{e}_x \bar{e}_y \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{xy}} + \bar{e}_x \bar{e}_z \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{xz}} + \bar{e}_y \bar{e}_x \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{yx}} + \dots \quad (2.252)$$

kunnen we ten tweede uit (2.247), (2.248) en (2.246) de volgende formuleringen van de constitutieve wet voor $\bar{\tau}_c^s$ afleiden, waarbij we aannemen dat $\varrho \approx \varrho_0$:

$$\bar{\tau}_c^s = \varrho_0 \frac{\partial u_{inw}^c(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}} = \bar{\tau}_c^s(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon}) \quad (2.253)$$

$$= \bar{\alpha}_c(\bar{M}_s) + \bar{\varepsilon} : \bar{E} \quad (2.254)$$

$$= (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_{mstr}^c(\bar{M}_s)) : \bar{E} \quad (2.255)$$

Hieruit blijkt dat de constitutieve wetten voor \bar{H} en voor $\bar{\tau}_c^s$ niet onafhankelijk van elkaar zijn. Ze zijn immers afgeleid van dezelfde energiefunctie $u_{inw}^c(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon})$. Het verband tussen beide wordt gegeven door de tensor $\bar{\alpha}_c(\bar{M}_s)$, m.a.w. door de magnetostrictie-energie, of volgens de alternatieve formulering door de vervorming ten gevolge van magnetostrictie $\bar{\varepsilon}_{mstr}^c(\bar{M}_s)$. Dit is analoog aan de hoger vermelde voorwaarde dat de differentiële susceptibiliteit $\bar{\chi}_d$ symmetrisch moet zijn waardoor de constitutieve wetten voor de componenten van \bar{M}_s bij $\bar{\varepsilon} = 0$ niet onafhankelijk van elkaar zijn. Voor de constitutieve wetten voor \bar{H} en voor $\bar{\tau}_c^s$ geldt een analoge symmetrievoorwaarde, die we hier illustreren aan de hand van een voorbeeld. Beschouwen we bijvoorbeeld een variatie van M_{sx} en ε_{xx} terwijl de andere componenten van de magnetisatie en de rek constant worden gehouden. De variatie van de energiedichtheid du_{inw}^c (2.247) wordt dan gegeven door:

$$du_{inw}^c = \mu_0 H_x dM_{sx} + \frac{1}{\varrho} \tau_{xx}^{cs} d\varepsilon_{xx} \quad (2.256)$$

De symmetrievoorwaarde van de constitutieve wetten luidt dan:

$$\frac{\partial \mu_0 H_x}{\partial \varepsilon_{xx}} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \tau_{xx}^{cs}}{\partial M_{sx}} \quad (2.257)$$

Uit de constitutieve wetten (2.250)-(2.251) en (2.253)-(2.254) volgt dat aan deze symmetrievoorwaarde inderdaad voldaan is.

Het begrip magnetostrictie is in deze context een relatief begrip, afhankelijk van de gebruikte formulering (in dit geval de Chu-formulering). De rek $\bar{\varepsilon}_{mstr}^c(\bar{M}_s)$ werd bijvoorbeeld ingevoerd als de spontane rek bij spanningsloze toestand. Volgens (2.255) betekent een rek $\bar{\varepsilon}$ gelijk aan $\bar{\varepsilon}_{mstr}^c(\bar{M}_s)$ dat de spanning $\bar{\tau}_c^s$ nul is, waarbij $\bar{\tau}_c^s$ echter slechts een deel van de totale spanning $\bar{\tau}(\bar{n})$ bepaalt.

Uit de volgende paragrafen zal echter blijken dat de tot hier toe opgestelde vergelijkingen toelaten de magnetisatie \bar{M}_s en de vervorming $\bar{\varepsilon}$ éénduidig te bepalen, waarbij de formuleringsafhankelijke grootheden, zoals de spanningstensor $\bar{\tau}_c^s$, de (fictieve) magnetische krachtdichtheid \bar{f}_c en zijn corresponderende spanning op randoppervlakken \bar{T}_c , de rek $\bar{\varepsilon}_{mstr}^c$, enz. enkel als hulpgrootheden dienen, zonder een echte fysische betekenis.

2.5.5 Magneto-elastische vergelijkingen in de Chu-formulering

Voor het berekenen van de magnetische velden, de magnetisatie \bar{M}_s , de verplaatsing \bar{u} , en dus de vervorming $\bar{\varepsilon}$ bij een gekende stroomverdeling \bar{J} en gekende uitwendige krachten \bar{f}_u en spanningen \bar{T}_u kunnen we beroep doen op de volgende vergelijkingen.

Ten eerste zijn er de wetten van Maxwell:

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J} \quad (2.258)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0 \quad (2.259)$$

$$\bar{B} = \mu_0(\bar{H} + \bar{M}) \quad (2.260)$$

met

$$\bar{M} = \varrho \bar{M}_s \quad (2.261)$$

Voor het \bar{H} -veld geldt bovendien de constitutieve wet (2.251):

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial u_{inw}^c(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{M}_s} = \bar{H}_c(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon}) \quad (2.262)$$

$$= \bar{H}^0(\bar{M}_s) + \frac{1}{\varrho_0 \mu_0} \frac{d\bar{\alpha}_c(\bar{M}_s)}{d\bar{M}_s} : \bar{\varepsilon} \quad (2.263)$$

We voeren verder de hulptensor $\bar{\tau}_c$ in volgens de werkwijze uiteengezet in §2.4 gegeven door

$$\bar{\tau}(\bar{n}) = \bar{n} \cdot \bar{\tau}_c - \bar{T}_c(\bar{n}) \quad (2.264)$$

waarbij de spanning $\bar{\tau}(\bar{n})$ de gezamenlijke kortefstandskrachtwerkingen voorstelt, ongeacht hun oorsprong.

Uit de bewegingsvergelijkingen volgt dat $\bar{\tau}_c$ voldoet aan de volgende wet in het materiaal:

$$\varrho \bar{a} = \varrho \bar{f}_u + \bar{f}_c + \bar{\nabla} \cdot \bar{\tau}_c \quad (2.265)$$

terwijl aan randoppervlakken de volgende gelijkheid geldt:

$$\bar{n} \cdot \bar{\tau}_c = \bar{T}_u + \bar{T}_c(\bar{n}) \quad (2.266)$$

We splitsen de spanningstensor $\bar{\tau}_c$ verder op in een symmetrisch en een antisymmetrisch deel:

$$\bar{\tau}_c = \bar{\tau}_c^s + \bar{\tau}_c^{as} \quad (2.267)$$

waarbij het antisymmetrisch deel bepaald wordt door de koppeldichtheid \bar{c}_c , wat leidt tot de volgende koppelvergelijking:

$$\bar{\tau}_c^{as} = -\frac{\mu_0}{2}(\bar{M}\bar{H} - \bar{H}\bar{M}) \quad (2.268)$$

Het symmetrisch deel wordt verder bepaald door de volgende constitutieve wet:

$$\bar{\tau}_c^s = \varrho_0 \frac{\partial u_{inw}^c(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}} = \bar{\tau}_c^s(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon}) \quad (2.269)$$

$$= \bar{\alpha}_c(\bar{M}_s) + \bar{\varepsilon} : \bar{E} \quad (2.270)$$

$$= (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_{mstr}^c(\bar{M}_s)) : \bar{E} \quad (2.271)$$

Tenslotte wordt de vervorming $\bar{\varepsilon}$ afgeleid van de verplaatsing \bar{u} volgens⁶:

$$\bar{\varepsilon} = (\nabla \bar{u})^s \quad (2.272)$$

Met behulp van bovenstaande vergelijkingen, met name

- de magnetische vergelijkingen (2.258)-(2.260)
- de bewegingsvergelijking (2.265), met $\bar{a} = 0$ voor statische problemen
- de evenwichtsvoorwaarde aan de rand (2.266)
- de koppelvergelijking (2.268)
- het verband tussen rek en verplaatsing (2.272)
- de constitutieve wetten (2.262) en (2.269)

aangevuld met

- de magnetische en de mechanische randvoorwaarden
- bij dynamische problemen, de beginvoorwaarden

is het probleem volledig bepaald.

De magnetische en de mechanische vergelijkingen zijn hierbij op verschillende niveau's gekoppeld, cf. [Hirsinger 95]. Ten eerste is er een koppeling via de constitutieve wetten voor \bar{H} en $\bar{\tau}_c$, de zgn. lokale koppeling. Er is verder ook een structurele koppeling. Bij vervorming ten gevolge van de magnetische krachtwerking verandert immers de geometrie waardoor het magnetisch veldprobleem wijzigt.

Deze koppeling van de magnetische en de elastische verschijnselen kan worden aangeduid met het begrip magneto-elastischeiteit.

⁶We nemen hier de verplaatsing \bar{u} als onbekende en leiden daar de rektensor $\bar{\varepsilon}$ uit af. Ook de rekken kunnen als onbekenden genomen worden. Er moet uiteraard een verplaatsingsveld bestaan dat met deze rekken overeenstemt, wat dan uitgedrukt wordt door de zgn. compatibiliteitsvoorwaarden voor de rekken.

2.5.6 Magneto-elastische vergelijkingen in de Ampère-formulering - Equivalentie met de Chu-formulering

2.5.6.1 Magneto-elastische vergelijkingen in de Ampère-formulering

Alle hulpgrootheden die in de vorige paragraaf voorkomen, aangeduid met index c , zijn afhankelijk van de gekozen opsplitsing van fysische grootheden. Enerzijds wordt de spanning $\bar{\tau}(\bar{n})$ die de kortafstandskrachtwerking weergeeft, ingedeeld in een tensor-gedeelte $\bar{n} \cdot \bar{\bar{\tau}}_c$, en een deel dat niet in tensornotatie kan geschreven worden $-\bar{T}_c(\bar{n})$, en dit op basis van de Chu-formulering van de elektromagnetische spanning $\bar{\sigma}_{em}$ die de magnetische langeafstandskrachtwerking bepaalt. Anderzijds wordt de door de magnetische bronnen buiten V_1 geleverde arbeid $dW_{0 \rightarrow 1}$ bij een magnetisatieverandering binnen het volume V_1 verdeeld in een deel zelfenergie dW_z^c en een deel energie opgenomen door het magnetisch materiaal dW_m^c , geformuleerd aan de hand van het \bar{H} -veld, het zgn. fundamentele veld van het Chu-model.

In deze paragraaf worden de vergelijkingen in de Ampère-formulering weergegeven. Het verschil met de Chu-formulering vloeit enkel voort uit een verschillende indeling van $\bar{\tau}(\bar{n})$ en $dW_{0 \rightarrow 1}$. Hieruit zal blijken dat de Chu- en Ampère-formulering van de basisvergelijkingen voor het oplossen van magneto-elastische problemen equivalent zijn.

Aan de hand van een analoge redenering als in §(2.4) kunnen we voor de beschrijving van de spanningen in gemagnetiseerd materiaal $\bar{\tau}(\bar{n})$ de hulptensor $\bar{\bar{\tau}}_a$ invoeren en de wetten waaraan deze tensor moet beantwoorden afleiden.

De elektromagnetische spanning $\bar{\sigma}_{em}(\bar{n})$ wordt hiertoe in de Ampère-formulering geschreven als:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{em} &= \bar{n} \cdot \bar{\bar{T}}_a + \bar{T}_a(\bar{n}) \\ &= \bar{n} \cdot \left[\bar{B}\bar{H} - \frac{\mu_0}{2} (H^2 - M^2) \bar{I} \right] - \frac{\mu_0}{2} M_t^2 \bar{n}\end{aligned}\quad (2.273)$$

De totale kracht en het totaal moment uitgeoefend door de magnetische langeafstandskrachten op een deel van een magnetisch lichaam kan eveneens berekend worden aan de hand van de volgende fictieve kracht- en koppilverdeling en de spanning op randoppervlakken:

$$\bar{f}_a = \bar{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}}_a = (\bar{\nabla} \bar{B}) \cdot \bar{M} \quad (2.274)$$

$$\bar{c}_a = \bar{M} \times \bar{B} \quad (2.275)$$

$$\bar{T}_a(\bar{n}) = -\frac{\mu_0}{2} M_t^2 \bar{n} \quad (2.276)$$

Verder kan aangetoond worden dat $\bar{\tau}(\bar{n}) + \bar{T}_a(\bar{n})$ varieert in functie van \bar{n} als een tensor die we $\bar{\bar{\tau}}_a$ noemen zodat :

$$\bar{\tau}(\bar{n}) = \bar{n} \cdot \bar{\bar{\tau}}_a - \bar{T}_a(\bar{n}) \quad (2.277)$$

De bewegingsvergelijkingen kunnen dan als volgt geformuleerd worden. In het materiaal geldt :

$$\varrho \bar{a} = \varrho \bar{f}_u + \bar{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}}_a + \bar{\nabla} \cdot \bar{\bar{\tau}}_a \quad (2.278)$$

$$= \varrho \bar{f}_u + \bar{f}_a + \bar{\nabla} \cdot \bar{\bar{\tau}}_a \quad (2.279)$$

terwijl aan randoppervlakken de volgende betrekking moet voldaan zijn:

$$\bar{n} \cdot \bar{\tau}_a = \bar{T}_u + \bar{T}_a(\bar{n}) \quad (2.280)$$

De magnetische koppeldichtheid $\bar{c}_a = \bar{M} \times \bar{B}$ bepaalt het antisymmetrisch deel van $\bar{\tau}_a$ en leidt tot:

$$\bar{\tau}_a = \bar{\tau}_a^s + \bar{\tau}_a^{as} \quad (2.281)$$

met

$$\bar{\tau}_a^{as} = -\frac{1}{2} (\bar{M}\bar{B} - \bar{B}\bar{M}) \quad (2.282)$$

Wat de arbeid en energie betreft bij bewegende gemagnetiseerde middenstoffen kunnen we na een analoge werkwijze als in §2.5 de volgende besluiten trekken.

De arbeid $dW_{0 \rightarrow 1}$ wordt volgens de Ampère-formulering als volgt verdeeld in zelfenergie dW_m^a en energie opgenomen door het magnetische materiaal dW_z^a :

$$dW_{0 \rightarrow 1} = \int_{V_1} \bar{B}_0 \cdot d\bar{M} \, dm \quad (2.283)$$

$$= \int_{V_1^+} \bar{B} \cdot d\bar{M} \, dv - \int_{V_1^+} \bar{B}_1 \cdot d\bar{M} \, dv \quad (2.284)$$

$$= dW_m^a + dW_z^a \quad (2.285)$$

De uitdrukking voor dW_m^a gegeven door

$$dW_m^a = \int_{V_1^+} \bar{B} \cdot d\bar{M} \, dv \quad (2.286)$$

wordt door over te gaan naar variaties ten opzichte van een meebewegende waarnemer volgens (2.190) en door het invoeren van het magnetisch moment per massa-eenheid volgens (2.197) omgevoerd tot

$$dW_m^a = \int_{V_1} \bar{B} \cdot d_m \bar{M}_s \, dm - \int_{V_1} d\bar{u} \cdot \bar{f}_a \, dv - \oint_{S_1} d\bar{u} \cdot \bar{T}_a(\bar{n}) \, ds + \int_{V_1} \bar{c}_a \cdot d\bar{\theta} \, dv \quad (2.287)$$

De arbeid dW_u die de uitwendige krachten opnemen en de variatie van de kinetische energie dE_{kin} wordt in functie van de Ampère-grootheden \bar{f}_a , $\bar{T}_a(\bar{n})$, en $\bar{\tau}_a$ gegeven door:

$$dW_u + dE_{kin} = \int_{V_1} \bar{f}_a \cdot d\bar{u} \, dv + \oint_{S_1} \bar{T}_a(\bar{n}) \cdot d\bar{u} \, ds - \int_{V_1} \bar{\tau}_a^s : d\bar{\varepsilon} \, dv + \int_{V_1} \bar{c}_a \cdot d\bar{\theta} \, dv \quad (2.288)$$

Uit (2.287) en (2.288) volgt

$$\dot{\mathcal{W}}_m^a = \int_{V_1} \bar{\mathbf{B}} \cdot d_m \bar{\mathbf{M}}_s \, dm + \int_{V_1} \bar{\tau}_a^s : d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dv + \dot{\mathcal{W}}_u + dE_{kin} \quad (2.289)$$

waaruit blijkt dat $\dot{\mathcal{W}}_m^a$ gedeeltelijk wordt omgezet in mechanische energie ($\dot{\mathcal{W}}_u + dE_{kin}$). De rest wordt opgeslagen als inwendige energie dU_{inw}^a en gedissipeerd als warmte $\dot{\mathcal{Q}}$:

$$dU_{inw}^a + \dot{\mathcal{Q}} = \int_{V_1} \bar{\mathbf{B}} \cdot d_m \bar{\mathbf{M}}_s \, dm + \int_{V_1} \bar{\tau}_a^s : d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dv \quad (2.290)$$

$$= \int_{V_1} \left(\bar{\mathbf{B}} \cdot d_m \bar{\mathbf{M}}_s + \frac{1}{\rho} \bar{\tau}_a^s : d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) dm \quad (2.291)$$

Bij reversibele processen ($\dot{\mathcal{Q}} = 0$) wordt de opgeslagen energie per massa-eenheid aldus bepaald door:

$$du_{inw}^a = \bar{\mathbf{B}} \cdot d_m \bar{\mathbf{M}}_s + \frac{1}{\rho} \bar{\tau}_a^s : d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.292)$$

met

$$u_{inw}^a = u_{inw}^a(\bar{\mathbf{M}}_s, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (2.293)$$

Dit leidt tot de volgende algemene uitdrukking voor de constitutieve wetten:

$$\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{B}}_a(\bar{\mathbf{M}}_s, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (2.294)$$

$$= \frac{\partial u_{inw}^a(\bar{\mathbf{M}}_s, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})}{\partial \bar{\mathbf{M}}_s} \quad (2.295)$$

$$\bar{\tau}_a^s = \bar{\tau}_a^s(\bar{\mathbf{M}}_s, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (2.296)$$

$$= \rho \frac{\partial u_{inw}^a(\bar{\mathbf{M}}_s, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad (2.297)$$

2.5.6.2 Equivalentie tussen de Chu- en de Ampère-formulering

Om de equivalentie tussen de Chu- en de Ampère-formulering aan te tonen, bepalen we het verschil tussen de energie opgenomen door het magnetisch materiaal volgens beide formuleringen, m.a.w. $\dot{\mathcal{W}}_m^a - \dot{\mathcal{W}}_m^c$, respectievelijk gegeven door (2.286) en (2.194):

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}}_m^a - \dot{\mathcal{W}}_m^c &= \int_{V_1^+} (\bar{\mathbf{B}} - \mu_0 \bar{\mathbf{H}}) \cdot d\bar{\mathbf{M}} \, dv \\ &= \int_{V_1^+} \mu_0 \bar{\mathbf{M}} \cdot d\bar{\mathbf{M}} \, dv \end{aligned}$$

Met behulp van vergelijkingen (2.190), (2.197) en (2.198), kan deze uitdrukking als volgt uitgewerkt worden:

$$\begin{aligned}
& \bar{d}W_m^a - \bar{d}W_m^c \\
&= \int_{V_1^+} \mu_0 (\bar{M} \cdot d_m \bar{M} - d\bar{u} \cdot (\bar{\nabla} \bar{M}) \cdot \bar{M} + \bar{M} \cdot d\bar{\theta} \times \bar{M}) \, dv \\
&= \int_{V_1^+} \mu_0 \bar{M} \cdot d_m \bar{M}_s \, dm - \int_{V_1^+} \mu_0 \left[\bar{M} \cdot \bar{M} (\bar{\nabla} \cdot d\bar{u}) + d\bar{u} \cdot \bar{\nabla} \left(\frac{1}{2} M^2 \right) \right] \, dv \\
&= \int_{V_1^+} \mu_0 \bar{M} \cdot d_m \bar{M}_s \, dm - \int_{V_1^+} \mu_0 \left[M^2 (\bar{\nabla} \cdot d\bar{u}) + \bar{\nabla} \left(\frac{1}{2} M^2 d\bar{u} \right) - \frac{1}{2} M^2 (\bar{\nabla} \cdot d\bar{u}) \right] \, dv \\
&= \int_{V_1^+} \mu_0 \bar{M} \cdot d_m \bar{M}_s \, dm - \int_{V_1^+} \mu_0 \left[\frac{1}{2} M^2 (\bar{\nabla} \cdot d\bar{u}) \right] \, dv + \oint_{S_1^+} \frac{\mu_0}{2} M^2 d\bar{u} \, dv \\
&= \int_{V_1} \mu_0 \bar{M} \cdot d_m \bar{M}_s \, dm - \int_{V_1} \frac{\mu_0}{2} M^2 (\bar{\nabla} \cdot d\bar{u}) \, dv \tag{2.298}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{V_1} \varrho \mu_0 \bar{M}_s \cdot d_m \bar{M}_s \, dm + \int_{V_1} \frac{\mu_0}{2} (\varrho \bar{M}_s)^2 \frac{d_m \varrho}{\varrho} \frac{1}{\varrho} \, dm \\
&= \int_{V_1} d_m \left(\varrho \frac{\mu_0}{2} M_s^2 \right) \, dm \tag{2.299}
\end{aligned}$$

Uit (2.299) blijkt dat, analoog als bij niet bewegende middenstoffen, het verschil tussen $\bar{d}W_m^a$ en $\bar{d}W_m^c$ bestaat uit de variatie van een opgeslagen energie per massa-eenheid, nl. $d_m \left(\varrho \frac{\mu_0}{2} M_s^2 \right)$.

Het verschil $\bar{d}W_m^a - \bar{d}W_m^c$ gegeven door (2.299) en (2.298) leidt tot het volgend verband tussen de opgeslagen energiedichtheid volgens de Chu- en de Ampère-formulering:

$$du_{inw}^a - du_{inw}^c = d_m \left(\varrho \frac{\mu_0}{2} M_s^2 \right) \tag{2.300}$$

$$= \mu_0 \bar{M} \cdot d_m \bar{M}_s - \frac{1}{\varrho} \frac{\mu_0}{2} M^2 (\bar{\nabla} \cdot d\bar{u}) \tag{2.301}$$

zodat:

$$du_{inw}^a = \bar{B} \cdot d_m \bar{M}_s + \frac{1}{\varrho} \bar{\tau}_a^s : d\bar{\varepsilon} \tag{2.302}$$

$$= du_{inw}^c + \mu_0 \bar{M} \cdot d_m \bar{M}_s - \frac{1}{\varrho} \frac{\mu_0}{2} M^2 (\bar{\nabla} \cdot d\bar{u}) \tag{2.303}$$

$$= du_{inw}^c + \mu_0 \bar{M} \cdot d_m \bar{M}_s - \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\mu_0}{2} M^2 \bar{I} \right) : d\bar{\varepsilon} \tag{2.304}$$

Hieruit blijkt dat de constitutieve wet voor \bar{B} (2.295) in overeenstemming is met de constitutieve

wet voor \bar{H} (2.250)

$$(2.304) \Rightarrow \frac{\partial u_{inw}^a(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{M}_s} = \frac{\partial u_{inw}^c(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{M}_s} + \mu_0 \bar{M} \quad (2.305)$$

$$\Rightarrow \bar{B}_a(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon}) = \mu_0 (\bar{H}_c(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon}) + \bar{M}) \quad (2.306)$$

Het verband tussen de constitutieve wetten voldoet dus aan:

$$\bar{B} = \mu_0(\bar{H} + \bar{M}) \quad (2.307)$$

Verder volgt uit (2.304) het verband tussen de constitutieve wetten voor $\bar{\tau}_a^s$ (2.297) en $\bar{\tau}_c^s$ (2.253):

$$(2.304) \Rightarrow \frac{\partial u_{inw}^a(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}} = \frac{\partial u_{inw}^c(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}} - \frac{\mu_0}{2\varrho} M^2 \bar{I} \quad (2.308)$$

$$\Rightarrow \bar{\tau}_a^s(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon}) = \bar{\tau}_c^s(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon}) - \frac{\mu_0}{2} M^2 \bar{I} \quad (2.309)$$

Uit de vergelijking van de Chu- en de Ampère-formulering van de spanning $\bar{\tau}(\bar{n})$ voor elke richting \bar{n} :

$$\begin{aligned} \bar{\tau}(\bar{n}) &= \bar{n} \cdot \bar{\tau}_c - \bar{T}_c(\bar{n}) \\ &= \bar{n} \cdot \bar{\tau}_a - \bar{T}_a(\bar{n}) \end{aligned} \quad (2.310)$$

en

$$\bar{T}_a(\bar{n}) - \bar{T}_c(\bar{n}) = -\frac{\mu_0}{2} M_t^2 \bar{n} - \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n} = -\frac{\mu_0}{2} M^2 \bar{n} \quad (2.311)$$

volgt dat

$$\bar{\tau}_a - \bar{\tau}_c = -\frac{\mu_0}{2} M^2 \bar{I} \quad (2.312)$$

Hieruit volgt dat ook de constitutieve wetten voor $\bar{\tau}_a^s$ en $\bar{\tau}_c^s$ (2.309) overeenstemmen.

Tenslotte geldt het volgend verband tussen \bar{T}_a en \bar{T}_c :

$$\bar{T}_a - \bar{T}_c = \frac{\mu_0}{2} M^2 \bar{I} \quad (2.313)$$

Uit de bovenstaande betrekkingen (2.305), (2.307), (2.308), (2.311), (2.312) en (2.313) tussen de Chu-grootheden $\mu_0 \bar{H}$, u_{inw}^c , \bar{T}_c , $\bar{\tau}_c$ en \bar{T}_c en de corresponderende Ampère-grootheden \bar{B} , u_{inw}^a , \bar{T}_a , $\bar{\tau}_a$ en \bar{T}_a volgt de equivalentie tussen de Chu- en de Ampère-formulering van de magneto-elastische

vergelijkingen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varrho \bar{a} = \varrho \bar{f}_u + \bar{\nabla} \cdot \bar{T}_c + \bar{\nabla} \cdot \bar{\tau}_c \\ \bar{n} \cdot \bar{\tau}_c = \bar{T}_u + \bar{T}_c(\bar{n}) \\ \bar{H} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial u_{inw}^c(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{M}_s} \\ \bar{\tau}_c^s = \varrho \frac{\partial u_{inw}^c(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}} \\ \bar{\tau}_c^{as} = -\frac{\mu_0}{2} (\bar{M} \bar{H} - \bar{H} \bar{M}) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varrho \bar{a} = \varrho \bar{f}_u + \bar{\nabla} \cdot \bar{T}_a + \bar{\nabla} \cdot \bar{\tau}_a \\ \bar{n} \cdot \bar{\tau}_a = \bar{T}_u + \bar{T}_a(\bar{n}) \\ \bar{B} = \frac{\partial u_{inw}^a(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{M}_s} \\ \bar{\tau}_a^s = \varrho \frac{\partial u_{inw}^a(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}} \\ \bar{\tau}_a^{as} = -\frac{1}{2} (\bar{M} \bar{B} - \bar{B} \bar{M}) \end{array} \right. \quad (2.314)$$

Uit theoretisch oogpunt zijn beide formuleringen equivalent. De inwendige energieën $u_{inw}^c(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon})$ en $u_{inw}^a(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon})$ die de constitutieve wetten bepalen moeten echter experimenteel bepaald worden, na het vooropstellen van een bepaalde vorm. Het is dus niet a priori verzekerd dat, zelfs bij gebruik van dezelfde proefresultaten, de constitutieve wetten voor de twee formuleringen, die men respectievelijk afleidt uit de opgemeten energiefuncties $u_{inw}^c(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon})$ en $u_{inw}^a(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon})$, overeenstemmen.

We kunnen nu aantonen dat, indien men voor het opstellen van de vorm van de inwendige energie u_{inw}^a een analoge redenering volgt als in §2.5.4.1, de equivalentie verzekerd is, mits de benadering $\varrho \approx \varrho_0$ aan te wenden. Deze benadering werd trouwens ook aangenomen bij het opstellen van de uitdrukking voor u_{inw}^c (en nu dus ook voor u_{inw}^a).

We beschouwen daartoe de volgende uitdrukkingen voor u_{inw}^a , die analoog zijn aan die voor u_{inw}^c :

$$u_{inw}^a = u_{mag}^a(\bar{M}_s) + u_{mstr}^a(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon}) + u_{el}^a(\bar{\varepsilon}) \quad (2.315)$$

$$= u_{mag}^a(\bar{M}_s) + \frac{1}{\varrho_0} \bar{\alpha}_a(\bar{M}_s) : \bar{\varepsilon} + \frac{1}{2\varrho_0} \bar{\varepsilon} : \bar{E} : \bar{\varepsilon} \quad (2.316)$$

$$= \tilde{u}_{mag}^a(\bar{M}_s) + \tilde{u}_{el}^a(\bar{\varepsilon}_{mech}^a) \quad (2.317)$$

$$= \tilde{u}_{mag}^a(\bar{M}_s) + \frac{1}{2\varrho_0} (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_{mstr}^a(\bar{M}_s)) : \bar{E} : (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_{mstr}^a(\bar{M}_s)) \quad (2.318)$$

met

$$u_{mag}^a(\bar{M}_s) = \tilde{u}_{mag}^a(\bar{M}_s) + \frac{1}{2\varrho_0} \bar{\varepsilon}_{mstr}^a(\bar{M}_s) : \bar{E} : \bar{\varepsilon}_{mstr}^a(\bar{M}_s)$$

$$\bar{\alpha}_a(\bar{M}_s) = -\bar{\varepsilon}_{mstr}^a(\bar{M}_s) : \bar{E} \quad (2.319)$$

$$\bar{B}^0(\bar{M}_s) = \frac{du_{mag}^a(\bar{M}_s)}{d\bar{M}_s} \quad (2.320)$$

waarbij $\bar{B}^0(\bar{M}_s)$ de magnetische inductie is in functie van \bar{M}_s bij $\bar{\varepsilon} = 0$.

Uit (2.292) en de bovenstaande uitdrukkingen voor de inwendige energie, volgt de constitutieve wet voor \bar{B}

$$\bar{B}_a(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon}) = \frac{du_{mag}^a(\bar{M}_s)}{d\bar{M}_s} + \frac{1}{\varrho_0} \frac{d\bar{\alpha}_a(\bar{M}_s)}{d\bar{M}_s} : \bar{\varepsilon} \quad (2.321)$$

$$= \bar{B}^0(\bar{M}_s) + \frac{1}{\varrho_0} \frac{d\bar{\alpha}_a(\bar{M}_s)}{d\bar{M}_s} : \bar{\varepsilon} \quad (2.322)$$

Voor $\bar{\tau}_a^s$ kan analoog de volgende constitutieve wet met $\varrho \approx \varrho_0$ afgeleid worden:

$$\bar{\tau}_a^s = \varrho_0 \frac{\partial u_{inw}^a(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}} = \bar{\tau}_a^s(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon}) \quad (2.323)$$

$$= \bar{\alpha}_a(\bar{M}_s) + \bar{\varepsilon} : \bar{E} \quad (2.324)$$

$$= (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_{mstr}^a(\bar{M}_s)) : \bar{E} \quad (2.325)$$

De rektensor $\bar{\varepsilon}_{mstr}^a(\bar{M}_s)$ stelt hier dus de vervorming bij $\bar{\tau}_a^s = 0$ voor.

Het opmeten van de constitutieve wetten voor beide formuleringen bestaat uit het bepalen van respectievelijk $\bar{H}^0(\bar{M}_s)$ en $\bar{B}^0(\bar{M}_s)$ en van respectievelijk $\bar{\alpha}_c(\bar{M}_s)$ en $\bar{\alpha}_a(\bar{M}_s)$, waarbij de elastische constanten die de tensor \bar{E} bepalen in beide gevallen gelijk zijn, en gekend worden verondersteld.

Het verband tussen de opgemeten \bar{H}^0 - en \bar{B}^0 -functie wordt (uiteraard) gegeven door:

$$\bar{B}^0(\bar{M}_s) = \mu_0(\bar{H}^0(\bar{M}_s) + \bar{M}) \quad (2.326)$$

Bij gekende magnetische omstandigheden (gekende \bar{H} , \bar{B} en \bar{M}_s), kan men met behulp van de evenwichtsvergelijkingen ($\bar{a} = 0$) in het volume en op de rand, $\bar{\tau}_c$ en $\bar{\tau}_a$ bepalen. Uit metingen van de vervorming $\bar{\varepsilon}$ kan men dan de constitutieve wetten voor $\bar{\tau}_c^s$ en $\bar{\tau}_a^s$, m.a.w. respectievelijk $\bar{\alpha}_c(\bar{M}_s)$ en $\bar{\alpha}_a(\bar{M}_s)$ bepalen. Uit de (vooropgestelde vorm van de) constitutieve wet voor $\bar{\tau}_a^s$ (2.324), de analoge wet voor $\bar{\tau}_c^s$ (2.254) en het verband tussen $\bar{\tau}_a$ en $\bar{\tau}_c$ volgens (2.312) volgt het verband tussen de experimenteel bepaalde tensoren $\bar{\alpha}_a$ en $\bar{\alpha}_c$:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_a(\bar{M}_s) - \bar{\alpha}_c(\bar{M}_s) &= \bar{\tau}_a^s - \bar{\tau}_c^s \\ &= -\frac{\mu_0}{2} M^2 \bar{I} \approx -\frac{\mu_0}{2} \varrho_0^2 M_s^2 \bar{I} \end{aligned} \quad (2.327)$$

Hieruit volgt rechtstreeks dat de vooropgestelde uitdrukkingen voor u_{inw}^c en u_{inw}^a voldoen aan de voorwaarde (2.308).

Uit

$$\frac{1}{\varrho_0} \frac{d(\bar{\alpha}_a(\bar{M}_s) - \bar{\alpha}_c(\bar{M}_s))}{d\bar{M}_s} : \bar{\varepsilon} = -\frac{d\frac{\mu_0}{2} \varrho_0 M_s^2 \bar{I}}{d\bar{M}_s} : \bar{\varepsilon} \quad (2.328)$$

$$= -\mu_0 \varrho_0 \bar{M}_s \bar{I} : \bar{\varepsilon} \quad (2.329)$$

$$= -\mu_0 \bar{M} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \quad (2.330)$$

en (2.326) volgt dat ook de andere voorwaarde voor het verband tussen u_{inw}^c en u_{inw}^a (2.305) voldaan is (of m.a.w. dat de constitutieve wet voor \bar{B} (2.5.6.2) en de analoge constitutieve wet voor \bar{H} (2.251) in overeenstemming zijn):

$$\frac{\partial u_{inw}^a(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{M}_s} = \bar{B}^0(\bar{M}_s) + \frac{1}{\varrho_0} \frac{d\bar{\alpha}_a(\bar{M}_s)}{d\bar{M}_s} : \bar{\varepsilon} \quad (2.331)$$

$$= \mu_0 \bar{H}^0(\bar{M}_s) + \mu_0 \bar{M} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\bar{\alpha}_c(\bar{M}_s)}{d\bar{M}_s} : \bar{\varepsilon} - \mu_0 \bar{M} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \quad (2.332)$$

$$= \frac{u_{inw}^c(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{M}_s} + \mu_0 \bar{M} (1 - (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})) \quad (2.333)$$

$$\approx \frac{u_{inw}^c(\bar{M}_s, \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{M}_s} + \mu_0 \bar{M} \quad (2.334)$$

Aangezien de experimenteel bepaalde energiefuncties u_{inw}^c (2.248) en u_{inw}^a (2.316) voldoen aan (2.305) en (2.308), zijn de magneto-elastistische vergelijkingen volgens de Chu- en de Ampère-formulering equivalent.

2.5.7 De fictieve elektromagnetische kracht- en koppeldichtheid \bar{f}_{em} en \bar{c}_{em}

Aan de hand van de constitutieve wetten voor $\bar{\tau}_c^s$ (2.254) en $\bar{\tau}_a^s$ (2.324) en de (identieke) uitdrukkingen voor de $\bar{\tau}_c^{as}$ (2.135) en $\bar{\tau}_a^{as}$ (2.282) kunnen we een spanningstensor $\bar{\tau}$ als volgt definiëren:

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_c - \bar{\alpha}_c(\bar{M}_s) \quad (2.335)$$

$$= \bar{\tau}_a - \bar{\alpha}_a(\bar{M}_s) \quad (2.336)$$

$$= \bar{\tau}^s + \bar{\tau}^{as} \quad (2.337)$$

waarbij het symmetrisch deel $\bar{\tau}^s$ gegeven wordt door de wet van Hooke:

$$\bar{\tau}^s = \bar{\varepsilon} : \bar{E} \quad (2.338)$$

terwijl het antisymmetrisch deel $\bar{\tau}^{as}$ bepaald is door de koppeldichtheid $\bar{c}_c = \bar{c}_a$:

$$\bar{\tau}^{as} = \bar{\tau}_c^{as} = -\frac{\mu_0}{2}(\bar{M}\bar{H} - \bar{H}\bar{M}) \quad (2.339)$$

$$= \bar{\tau}_a^{as} = -\frac{1}{2}(\bar{M}\bar{B} - \bar{B}\bar{M}) \quad (2.340)$$

zodat $\bar{\tau}$ gegeven wordt door:

$$\bar{\tau} = \bar{\varepsilon} : \bar{E} - \frac{\mu_0}{2}(\bar{M}\bar{H} - \bar{H}\bar{M}) \quad (2.341)$$

Gebruik makend van de relaties tussen de diverse Chu- en Ampère-grootheden, definiëren we verder een elektromagnetische spanningstensor \bar{T}_{em} :

$$\bar{T}_{em} = \bar{T}_c + \bar{\alpha}_c \quad (2.342)$$

$$= \bar{T}_a + \bar{\alpha}_a \quad (2.343)$$

en de daaruitvolgende (fictieve) magnetische krachtdichtheid \bar{f}_{em} :

$$\bar{f}_{em} = \bar{\nabla} \cdot \bar{T}_{em} \quad (2.344)$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \bar{T}_c + \bar{\nabla} \cdot \bar{\alpha}_c = \bar{f}_c + \bar{\nabla} \cdot \bar{\alpha}_c \quad (2.345)$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \bar{T}_a + \bar{\nabla} \cdot \bar{\alpha}_a = \bar{f}_a + \bar{\nabla} \cdot \bar{\alpha}_a \quad (2.346)$$

en de corresponderende spanning op randoppervlakken:

$$\bar{T}_{em}(\bar{n}) = \bar{T}_c(\bar{n}) - \bar{n} \cdot \bar{\alpha}_c \quad (2.347)$$

$$= \bar{T}_a(\bar{n}) - \bar{n} \cdot \bar{\alpha}_a \quad (2.348)$$

De elektromagnetische koppeldichtheid \bar{c}_{em} kunnen we (vanzelfsprekend) als volgt definiëren:

$$\bar{c}_{em} = \bar{M} \times \bar{B} \quad (= \mu_0 \bar{M} \times \bar{H} = \bar{c}_c = \bar{c}_a) \quad (2.349)$$

De bewegingsvergelijkingen in het materiaal (2.137) en (2.278) kunnen met behulp van bovenstaande definities herleid worden tot:

$$\rho \bar{a} = \rho \bar{f}_u + \bar{f}_{em} + \bar{\nabla} \cdot \bar{\tau} \quad (2.350)$$

$$= \rho \bar{f}_u + \bar{\nabla} \cdot \bar{T}_{em} + \bar{\nabla} \cdot \bar{\tau} \quad (2.351)$$

terwijl de evenwichtvoorwaarde aan de rand de volgende vorm aanneemt:

$$\bar{n} \cdot \bar{\tau} = \bar{T}_u + \bar{T}_{em} \quad (2.352)$$

De spanning $\bar{\tau}(\bar{n})$ wordt tenslotte gegeven door:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}(\bar{n}) &= \bar{n} \cdot \bar{\tau}_c - \bar{T}_c(\bar{n}) \\ &= \bar{n} \cdot \bar{\tau}_a - \bar{T}_a(\bar{n}) \\ &= \bar{n} \cdot \bar{\tau} - \bar{T}_{em}(\bar{n}) \end{aligned} \quad (2.353)$$

De vergelijkingen voor het berekenen van de verplaatsing en de vervorming van gemagnetiseerd materiaal bestaan dan uit de magnetische vergelijkingen (wetten van Maxwell en constitutieve wet voor \bar{H} of \bar{B}) gekoppeld met de volgende vergelijkingen:

$$\rho \bar{a} = (\rho \bar{f}_u + \bar{f}_{em}) + \bar{\nabla} \cdot \bar{\tau} \quad \text{binnen het volume} \quad (2.354)$$

$$\bar{n} \cdot \bar{\tau} = \bar{T}_u + \bar{T}_{em} \quad \text{op de rand} \quad (2.355)$$

$$\bar{\tau} = \bar{\varepsilon} : \bar{E} - \frac{\mu_0}{2} (\bar{M} \bar{H} - \bar{H} \bar{M}) \quad (2.356)$$

$$\bar{\varepsilon} = (\bar{\nabla} \bar{u})^s \quad (2.357)$$

In het geval waarbij de koppeldichtheid nul is ($\bar{c}_{em} = 0$), is de spanningstensor $\bar{\tau}$ symmetrisch en verhoudt hij zich tot de rektensor volgens de wet van Hooke. De verplaatsing \bar{u} en vervorming $\bar{\varepsilon}$ van gemagnetiseerd materiaal kunnen in dit geval bepaald worden aan de hand van de vergelijkingen van de klassieke elasticiteitsleer waarbij de belasting bestaat uit de fictieve elektromagnetische krachtdichtheid \bar{f}_{em} en de spanningen \bar{T}_{em} op de rand, die aan de uitwendige krachten $\rho \bar{f}_u$ en \bar{T}_u worden toegevoegd. In het algemene geval waarbij er een koppeldichtheid $\bar{c}_{em} = \mu_0 \bar{M} \times \bar{H}$ optreedt, bevat $\bar{\tau}$ eveneens een antisymmetrisch deel dat rechtstreeks door deze koppeldichtheid wordt bepaald.

2.5.8 Vervorming ten gevolge van magnetische langeafstandskrachten

De magneto-elastische vergelijkingen worden mede bepaald door een aantal parameters die proef-ondervindelijk moeten worden bepaald, met name $H^0(\bar{M}_s)$ (of $B^0(\bar{M}_s)$), $\bar{\alpha}_c(\bar{M}_s)$ (of $\bar{\alpha}_a(\bar{M}_s)$) en \bar{E} , die voorkomen in de constitutieve wetten of, zoals in de formulering van de vorige paragraaf, in de fictieve elektromagnetische krachtdichtheid \bar{f}_{em} en de corresponderende spanning op randoppervlakken \bar{T}_{em} . We gaan er nu van uit dat het zuiver magnetisch en het zuiver elastisch gedrag gekend zijn, m.a.w. dat $\bar{H}^0(\bar{M}_s)$ en \bar{E} gekend zijn, terwijl $\bar{\alpha}_c(\bar{M}_s)$ en $\bar{\alpha}_a(\bar{M}_s)$ niet bepaald zijn. We beschouwen verder de volgende probleemstelling. De magnetische langeafstandskrachten zijn éénduidig bepaald door de spanning $\bar{\sigma}_{em}(\bar{n})$. Hoe kunnen we nu vervorming bepalen die veroorzaakt wordt door deze magnetische langeafstandskrachtwerking? We wensen met andere woorden de elektromagnetische spanningstensor \bar{T}_{em} en de overeenkomstige (fictieve) krachtenverdeling \bar{f}_{em} en spanning op randoppervlakken \bar{T}_{em} te bepalen die de magnetische langeafstandskrachtwerking weergeven en die dus door toepassing van (2.354)-(2.357) de vervorming ten gevolge van de langeafstandskrachten opleveren. De bekomen vervorming zal nagenoeg gelijk zijn aan de totale vervorming als de vervorming door interne structuurveranderingen (de zgn. zuivere magnetostrictie), m.a.w. door de magnetische krachtwerving op microscopisch niveau, te verwaarlozen is t.o.v. de vervorming door de langeafstandskrachten. Als de magnetische korteafstandskrachten niet in aanmerking worden genomen betekent dit dat de spanning $\bar{\tau}(\bar{n})$ van zuiver mechanische aard is.

Het gestelde probleem wordt niet opgelost door in de uitdrukkingen voor de inwendige energie u_{inw}^c of u_{inw}^a de 'magnetostrictie-energie' u_{mstr}^c of u_{mstr}^a en dus $\bar{\alpha}_c$ of $\bar{\alpha}_a$ gelijk aan nul te stellen, wat gelijkwaardig is met het nul stellen van de 'vervorming door magnetostrictie' $\bar{\epsilon}_{mstr}^c$ of $\bar{\epsilon}_{mstr}^a$. Beschouwen we bijvoorbeeld het geval $\bar{\alpha}_c = 0$. In dit geval wordt de spanningstensor gegeven door :

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_c \quad (2.358)$$

en wordt de elektromagnetische krachtwerving bepaald door:

$$\begin{aligned} \bar{f}_{em} &= \bar{f}_c \\ \bar{T}_{em} &= \bar{T}_c \\ \bar{c}_{em} &= \bar{c}_c \end{aligned}$$

De vervorming wordt dus berekend alsof de fictieve krachtenverdeling volgens het Chu-model de 'ware' magnetische krachtwerving weergeeft.

De spanning $\bar{\tau}(\bar{n})$, van zuiver mechanische aard in de gegeven probleemstelling, wordt bijgevolg gegeven door:

$$\bar{\tau}(\bar{n}) = \bar{n} \cdot \bar{\tau} - \bar{T}_{em}(\bar{n}) \quad (2.359)$$

$$\begin{aligned} &= \bar{n} \cdot \bar{\tau}_c - \bar{T}_c(\bar{n}) \\ &= \bar{n} \cdot \bar{\tau}_c - \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n} \end{aligned} \quad (2.360)$$

met

$$\bar{\tau}^s = \bar{\tau}_c^s = \bar{\epsilon} : \bar{E} \quad (2.361)$$

De vervorming wordt dus enkel bepaald door $\bar{\tau}_c^s$:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\tau}_c^s : \bar{E}^{-1} \quad (2.362)$$

Het antisymmetrisch deel van $\bar{\tau}$ komt overeen met een koppeldichtheid en bewerkstelligt enkel een rotatie maar geen vervorming. De vervorming in een punt zou dus enkel afhangen van het gedeelte van de totale mechanische spanning $\bar{\tau}(\bar{n})$ (2.360) dat volgens een tensor varieert $\bar{n} \cdot \bar{\tau}_c$. De normaalspanning $-T_{em}(\bar{n}) = -\bar{T}_c(\bar{n}) = -\frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n}$, m.a.w. de druk $\frac{\mu_0}{2} M_n^2$, zou dus geen invloed op de vervorming hebben, terwijl men ten gevolge van een dergelijke druk een samendrukking volgens de richting van \bar{M} verwacht.

Indien men $\bar{\alpha}_a$ gelijk aan nul zou stellen, zou men bekomen dat de spanning $-\bar{T}_{em}(\bar{n}) = -\bar{T}_a(\bar{n}) = \frac{\mu_0}{2} M_t^2 \bar{n}$ geen bijdrage tot de vervorming levert. Beide redeneringen leiden dus tot een verschillend, overigens niet realistisch, mechanisch gedrag, dat afhangt van de opsplitsing van $\bar{\tau}(\bar{n})$.

Uit bovenstaande redenering kunnen we besluiten dat wegens het (veronderstelde) zuiver mechanisch karakter van $\bar{\tau}(\bar{n})$ het deel $-\bar{T}_{em}(\bar{n})$ van de spanning $\bar{\tau}(\bar{n})$ in een punt geen bijdrage levert tot de vervorming in dat punt, indien \bar{T}_{em} de spanning is die hoort bij de elektromagnetische spanningstensor \bar{T}_{em} die de magnetische langeafstandskrachtwerking weergeeft.

Om de elektromagnetische spanningstensor \bar{T}_{em} en de corresponderende krachtdichtheid \bar{f}_{em} en spanning op randoppervlakken \bar{T}_{em} , die de magnetische langeafstandskrachtwerking weergeven, te bepalen, gaan we uit van de volgende redenering.

Aangezien de spanning $\bar{\tau}(\bar{n})$ van zuiver mechanische aard is wordt de arbeid verricht door $\bar{\tau}(\bar{n})$ bij een vervorming $d\bar{\varepsilon}$ opgeslagen als elastische energie $d(\frac{1}{2}\bar{\varepsilon} : \bar{E} : \bar{\varepsilon})$.

In appendix E wordt aangetoond dat de arbeid verricht door $\bar{\tau}(\bar{n}) = \bar{n} \cdot \bar{\tau}_c - \bar{T}_c(\bar{n})$ bij een willekeurige vervorming $d\bar{\varepsilon}$ gegeven is door:

$$\left(\bar{\tau}_c^s - \frac{\mu_0}{10} M^2 \bar{I} - \frac{\mu_0}{5} \bar{M} \bar{M} \right) : d\bar{\varepsilon} \quad (2.363)$$

Deze arbeid wordt omgezet in elastische energie zodat:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{2}\bar{\varepsilon} : \bar{E} : \bar{\varepsilon}\right) &= \bar{\tau}^s : d\bar{\varepsilon} \\ &= \left(\bar{\tau}_c^s - \frac{\mu_0}{10} M^2 \bar{I} - \frac{\mu_0}{5} \bar{M} \bar{M} \right) : d\bar{\varepsilon} \end{aligned} \quad (2.364)$$

Aangezien dit geldt voor een willekeurige vervorming volgt hieruit:

$$\bar{\tau}^s = \bar{\tau}_c^s - \frac{\mu_0}{10} M^2 \bar{I} - \frac{\mu_0}{5} \bar{M} \bar{M} \quad (2.365)$$

wat volgens (2.335) en (2.339) correspondeert met de volgende waarde voor $\bar{\alpha}_c$:

$$\bar{\alpha}_c = \frac{\mu_0}{10} M^2 \bar{I} + \frac{\mu_0}{5} \bar{M} \bar{M} \quad (2.366)$$

Hieruit volgen dan de elektromagnetische spanningstensor volgens (2.342) :

$$\bar{T}_{em} = \bar{T}_c + \frac{\mu_0}{10} M^2 \bar{I} + \frac{\mu_0}{5} \bar{M} \bar{M} \quad (2.367)$$

$$= \bar{B} \bar{H} - \frac{\mu_0}{2} H^2 \bar{I} + \frac{\mu_0}{10} M^2 \bar{I} + \frac{\mu_0}{5} \bar{M} \bar{M} \quad (2.368)$$

de fictieve elektromagnetische krachtdichtheid volgens (2.345) :

$$\bar{f}_{em} = \bar{\nabla} \cdot \left(\bar{T}_c + \frac{\mu_0}{10} M^2 \bar{I} + \frac{\mu_0}{5} \bar{M} \bar{M} \right) \quad (2.369)$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \left(\bar{B} \bar{H} - \frac{\mu_0}{2} H^2 \bar{I} + \frac{\mu_0}{10} M^2 \bar{I} + \frac{\mu_0}{5} \bar{M} \bar{M} \right) \quad (2.370)$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \bar{T}_{em} \quad (2.371)$$

en de spanning op randoppervlakken volgens (2.347) :

$$\bar{T}_{em}(\bar{n}) = \bar{T}_c - \bar{n} \cdot \left(\frac{\mu_0}{10} M^2 \bar{I} + \frac{\mu_0}{5} \bar{M} \bar{M} \right) \quad (2.372)$$

$$= \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n} - \frac{\mu_0}{10} M^2 \bar{n} - \frac{\mu_0}{5} M_n \bar{M} \quad (2.373)$$

Voor de volledigheid vermelden we dat de elektromagnetische koppeldichtheid zoals steeds gegeven wordt door:

$$\bar{c}_{em} = \bar{M} \times \bar{B} = \mu_0 \bar{M} \times \bar{H} \quad (2.374)$$

Zoals hoger reeds uiteengezet, volgt uit het zuiver mechanisch karakter van $\bar{\tau}(\bar{n})$ gegeven door (2.359) dat $-\bar{T}_{em}(\bar{n})$ geen vervorming veroorzaakt. De gevolgde redenering impliceert dus dat de spanning $-\bar{T}_{em}(\bar{n})$ hier gegeven door (2.373) geen bijdrage levert tot de vervorming $\bar{\epsilon}$.

De bekomen waarde voor $\bar{\alpha}_c$ (2.366) leidt verder tot de constitutieve wet voor \bar{H} :

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \bar{H}^0(\bar{M}_s) + \frac{1}{\mu_0} \frac{d\bar{\alpha}_c}{d\bar{M}_s} : \bar{\epsilon} \\ &= H^0(\bar{M}_s) + \frac{1}{5} (\bar{M}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) + \bar{M} \cdot \bar{\epsilon}) \end{aligned} \quad (2.375)$$

Zelfs in ferromagnetisch materiaal waar de verhouding $\frac{M}{H}$ van de grootte-orde 1000 kan zijn, mag men bij kleine rekken aannemen dat de constitutieve wet voor \bar{H} nagenoeg niet van de vervorming afhangt in de gegeven omstandigheden, m.a.w. als de vervorming ten gevolge van de magnetische kortafstandskrachten (zuivere magnetostrictie) te verwaarlozen is.

2.6 Uitdrukkingen van de magnetische krachtenverdeling uit de literatuur

In de literatuur komen verschillende uitdrukkingen voor de magnetische krachtenverdeling voor. De meeste uitdrukkingen worden afgeleid met behulp van het principe van de virtuele arbeid of steunen

op een formulering van de Maxwell-spanningen. Beide methodes gelden in principe enkel voor het bepalen van de totale magnetische kracht en het totaal moment die op een lichaam inwerken, of voor de bepaling van de hoger gedefinieerde magnetische langeafstandskrachtwerking op een deel van een magnetisch lichaam en zijn equivalent zoals in Appendix C werd aangetoond.

Het principe van de virtuele arbeid wordt in de literatuur ook aangewend om de magnetische krachtdichtheid (kracht per volume-eenheid) te bepalen. Hierbij wordt de inwendige energiedichtheid van gemagnetiseerd vervormbaar materiaal als het ware expliciet ingedeeld in magnetostatische en elastische energie. De krachtdichtheid wordt dan bepaald aan de hand van de geleverde arbeid van de spanningsbronnen dW_e en de variatie van de magnetostatische energie dW bij een (virtuele) verplaatsing van een infinitesimaal volumetje rond een punt. Aldus bekomt men een kracht per volume-eenheid of m.a.w. de magnetische krachtdichtheid in het beschouwde punt. Op basis van deze krachtdichtheid wordt dan met behulp van de klassieke elasticiteitsleer de vervorming bepaald, waarbij enkel de elastische energie een rol speelt.

Bij een virtuele verplaatsing van een infinitesimaal volumetje vervormt echter het omliggende materiaal zodat de magnetische permeabiliteit ervan kan wijzigen. Dit kan men weergeven door de magnetische permeabiliteit μ afhankelijk te maken van de massadichtheid ρ .

Indien men in eerste instantie isotroop lineair magnetisch materiaal beschouwt waarvan de permeabiliteit μ niet van de massadichtheid afhangt bekomt men het volgende resultaat voor de magnetische krachtdichtheid volgens het principe van de virtuele arbeid, zoals bijvoorbeeld wordt afgeleid in [Woodson 68]:

$$\bar{f} = \bar{J} \times \bar{B} - \frac{1}{2} H^2 \bar{\nabla} \mu \quad (2.376)$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \bar{T} \quad (2.377)$$

met

$$\bar{T} = \bar{B} \bar{H} - \frac{1}{2} \bar{B} \cdot \bar{H} \bar{I} \quad (2.378)$$

$$= \mu \bar{H} \bar{H} - \frac{1}{2} \mu H^2 \bar{I} \quad (2.379)$$

De tensor \bar{T} (2.378) is in niet-magnetisch materiaal ($\mu = \mu_0$) gelijk aan de spanningstensor van Maxwell $\bar{T}_{Maxwell}$. (2.121)-(2.123). De totale kracht en het totaal moment op een magnetisch lichaam kunnen bijgevolg bepaald worden door integratie van de spanningen $\bar{n} \cdot \bar{T}$ over een oppervlak S_1 dat het lichaam omsluit en gelegen is in niet-magnetisch materiaal:

$$\bar{F} = \oint_{S_1} \bar{n} \cdot \bar{T} ds \quad (2.380)$$

$$= \int_{V_1} \bar{f} dv \quad (2.381)$$

$$\bar{L} = \oint_{S_1} \bar{r} \times (\bar{n} \cdot \bar{T}) ds \quad (2.382)$$

$$= \int_{V_1} \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{f}} \, dv \quad (2.383)$$

Volgens (2.376)-(2.378) wordt de spanningstensor $\bar{\bar{T}}$ ook gebruikt voor de bepaling van de krachtenverdeling en dus toegepast in het magnetisch materiaal. In de literatuur, bijvoorbeeld in [Ren 94b], spreekt men hierbij van een lokale toepassing van de spanningen van Maxwell.

Indien het materiaal bovendien stroomvrij is ($\bar{\mathbf{J}} = 0$), is de magnetische krachtdichtheid volgens (2.376) nul in homogeen lineair materiaal aangezien μ constant is zodat $\bar{\nabla}\mu = 0$. De magnetische krachtwerking herleidt zich in dit geval tot een oppervlaktekracht op scheidingsoppervlakken tussen twee verschillende materialen waar $\bar{\nabla}\mu$ een singulariteit vertoont. Deze oppervlaktekracht kan worden bepaald door het verschil te beschouwen van de spanning $\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\bar{T}}$ aan beide zijden van het scheidingsoppervlak zoals in Appendix A wordt toegelicht en toegepast voor het bepalen van de zgn. spanningen op randoppervlakken. Voor een scheidingsoppervlak tussen een materiaal met permeabiliteit μ en een niet-magnetisch materiaal (met permeabiliteit μ_0) bekomt men op basis van (2.378) de volgende uitdrukkingen van de oppervlaktekracht:

$$\bar{\bar{T}}(\bar{\mathbf{n}}) = \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\bar{T}}' - \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\bar{T}} \quad (2.384)$$

$$= B'_n \bar{H}' - \frac{1}{2} B' H' \bar{\mathbf{n}} - \left(B_n \bar{H} - \frac{1}{2} B H \bar{\mathbf{n}} \right) \quad (2.385)$$

$$= \left[B_n (H'_n - H_n) - \frac{1}{2} (B' H' - B H) \right] \bar{\mathbf{n}} \quad (2.386)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) B_n^2 - (\mu_0 - \mu) H_t^2 \right] \bar{\mathbf{n}} \quad (2.387)$$

$$= \frac{1}{2} (\mu - \mu_0) \bar{H}' \cdot \bar{H} \bar{\mathbf{n}} \quad (2.388)$$

waarbij de grootheden aangeduid met een accent betrekking hebben op het niet-magnetisch materiaal en die zonder accent op het magnetisch materiaal. In de literatuur worden deze oppervlaktekrachten veelvuldig besproken en toegepast, bijvoorbeeld (2.387) in [Ren 94b] en (2.385) en (2.388) in [Reyne 87]. We merken op dat de spanning op het randoppervlak $\bar{\bar{T}}(\bar{\mathbf{n}})$ enkel een normaalcomponent bevat.

De aard van de bekomen krachtenverdeling, nl. een normaalspanning op de rand, kan eenvoudig afgeleid worden van de gevolgde werkwijze bij toepassing van het principe van de virtuele arbeid. Bij een virtuele verplaatsing van een (infinitesimaal) volume binnen het lineair, isotroop en homogeen materiaal waarbij het omliggende materiaal wel vervormt maar waarbij de permeabiliteit niet afhangt van de massadichtheid is er vanuit magnetisch oogpunt geen enkele verandering waar te nemen. Er is bijgevolg geen variatie van de magnetische energie en dus geen magnetische krachtdichtheid in het materiaal. Bij een virtuele verplaatsing van het randoppervlak volgens de richting van de buitennormale wordt er als het ware niet-magnetisch materiaal (met permeabiliteit μ_0) vervangen door magnetisch materiaal (met permeabiliteit μ)⁷, zodat er een verandering van de magnetische energie optreedt wat resulteert in een magnetische normaalspanning. De gevolgde werkwijze en het bekomen resultaat illustreren de twijfelachtige theoretische achtergrond van de methode zodat men bezwaarlijk kan stellen dat de lokale toepassing van het principe van de virtuele arbeid tot de 'ware' krachtenverdeling in gemagnetiseerd materiaal leidt hoewel soms het tegendeel wordt beweerd: *'The local application of the virtual work principle appears to be the most correct*

approach' [Reyne 88a]. De bekomen krachtenverdeling moet mijns inziens eerder beschouwd worden als één van de krachtdichtheden die toelaten de totale kracht en het totaal moment volgens (2.380)-(2.383) te bepalen.

Het principe van de virtuele arbeid wordt ook toegepast voor de berekening van de krachtenverdeling in niet-lineaire materialen wat de volgende krachtdichtheid oplevert, zie bijvoorbeeld [Carter 65], [Reyne 87] en [Henneberger 92b]:

$$\bar{f} = \bar{J} \times \bar{B} - \frac{1}{2} \int_0^H H \bar{\nabla} \mu dH \quad (2.389)$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \bar{T} \quad (2.390)$$

met

$$\bar{T} = \bar{B} \bar{H} - \int_0^H \mu H dH \bar{I} \quad (2.391)$$

$$= \bar{B} \bar{H} - \int_0^H B dH \bar{I} \quad (2.392)$$

$$= \bar{B} \bar{H} - w_{co} \bar{I} \quad (2.393)$$

waarbij de coënergiedichtheid w_{co} als volgt gedefinieerd is:

$$w_{co} = \int_0^H B dH \quad (2.394)$$

In [Aronson 89] komt men evenwel tot een andere spanningstensor \bar{T} , de zgn. niet-lineaire spanningstensor van Maxwell, nl.

$$\bar{T} = \bar{B} \bar{H} - \int_0^B H dB \bar{I} \quad (2.395)$$

$$= \bar{B} \bar{H} - w \quad (2.396)$$

met w de magnetostatische energiedichtheid gegeven door:

$$w = \int_0^B H dB \quad (2.397)$$

Bij lineair materiaal herleiden beide tensoren (2.391) en (2.396) zich tot de hoger vermelde tensor (2.378).

⁷In de literatuur (bijvoorbeeld [Reyne 87] en [Ren 94b]) associeert men de bekomen krachtdichtheid waarbij de verandering van de permeabiliteit met de massadichtheid niet wordt beschouwd met de magnetische krachtdichtheid in 'onsamendrukbaar materiaal'. Bij de bepaling van de kracht op de randoppervlakken door een virtuele verplaatsing van de rand wordt echter het materiaal onder het oppervlak wel degelijk uitgerekend of samengedrukt.

Volgens zowel (2.391) als (2.396) wordt de magnetische krachtdichtheid bij niet-lineaire materialen niet alleen bepaald door het H - en het B -veld, en dus mede door de constitutieve wet (B - H -karakteristiek) in het beschouwde werkingpunt, maar ook door de waarde van de magnetische (co)energiedichtheid, en hangt zij dus af van de doorlopen B - H -karakteristiek tijdens het magnetisatieproces. Dit is te verklaren door het feit dat er bij de beschouwde virtuele verplaatsingen als het ware een uitwisseling van materiaal in verschillende verzadigingstoestanden (verschillende permeabiliteit μ) plaatsvindt, net als bij de verplaatsing van het randoppervlak waar niet-magnetisch door magnetisch materiaal vervangen wordt.

Zoals reeds vermeld wordt eventueel de afhankelijkheid van de permeabiliteit met de massadichtheid in rekening gebracht. Het deel van de magnetische krachtdichtheid dat te wijten is aan de massadichtheid-afhankelijkheid van de permeabiliteit, wordt hierbij de magnetostrictiekrachtdichtheid genoemd [Woodson 68].

In het lineair geval bekomt men de volgende krachtdichtheid volgens [Woodson 68]:

$$\bar{f} = \bar{J} \times \bar{B} - \frac{1}{2} H^2 \bar{\nabla} \mu + \bar{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{2} H^2 \frac{\partial \mu}{\partial \varrho} \bar{\varrho} \right) \quad (2.398)$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \bar{T} \quad (2.399)$$

met

$$\bar{T} = \bar{B} \bar{H} - \frac{1}{2} \bar{B} \cdot \bar{H} \bar{I} + \frac{1}{2} H^2 \frac{\partial \mu}{\partial \varrho} \bar{\varrho} \bar{I} \quad (2.400)$$

terwijl voor niet-lineair materiaal de krachtdichtheid afgeleid wordt van de volgende tensor \bar{T} [Reyne 87]:

$$\bar{T} = \bar{B} \bar{H} - \int_0^H \left(\mu - \left(\frac{\partial \mu}{\partial \varrho} \right) \varrho \right) H dH \bar{I} \quad (2.401)$$

In [Reyne 87] wordt één van de meest voor de hand liggende mogelijkheden voor $\frac{\partial \mu}{\partial \varrho}$ besproken waarbij enkel lineair materiaal wordt beschouwd. Men veronderstelt dat de magnetische susceptibiliteit χ , die de magnetisatie \bar{M} (magnetische moment per volume-eenheid) bepaalt in functie van het \bar{H} -veld volgens

$$\bar{M} = \chi \bar{H} , \quad (2.402)$$

evenredig is met de massadichtheid, m.a.w. met het aantal magnetische dipolen per volume-eenheid. Uit

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi) , \quad (2.403)$$

waarbij χ evenredig is met ϱ , volgt:

$$\frac{d\mu}{d\varrho} = \mu_0 \frac{\chi}{\varrho} = \text{constant} \quad (2.404)$$

De krachtdichtheid en de bijbehorende spanningstensor (2.400) voor lineaire materialen worden in dit geval gegeven door:

$$\bar{f} = \bar{J} \times \bar{B} + \frac{1}{2} \mu_0 \chi \bar{\nabla} (H^2) \quad (2.405)$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \bar{T} \quad (2.406)$$

met

$$\bar{T} = \bar{B} \bar{H} - \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \bar{I} \quad (2.407)$$

We merken op dat deze tensor (2.407) gelijk is aan de tensor \bar{T}_c . De bekomen krachtdichtheid

$$\bar{f} = \bar{\nabla} \cdot \bar{T} \quad (2.408)$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \bar{T}_c \quad (2.409)$$

$$= \bar{f}_c \quad (2.410)$$

en de bijbehorende spanning op randoppervlakken

$$\bar{T} = \bar{T}_c \quad (2.411)$$

komen dus overeen met de in §2.5.7 gedefinieerde (fictieve) elektromagnetische krachtdichtheid \bar{f}_{em} (2.345) en spanning op randoppervlakken \bar{T}_{em} (2.347) voor het geval $\bar{\alpha}_c = 0$. Volgens de constitutieve wet (2.251) is er bij $\bar{\alpha}_c = 0$ een éénduidig verband tussen \bar{H} en \bar{M}_s , het magnetisch moment per massa-eenheid:

$$\bar{H} = \bar{H}_0(\bar{M}_s) \quad (2.412)$$

Dit komt overeen met de vooropgestelde evenredigheid tussen de susceptibiliteit χ en de massadichtheid ρ . Inderdaad, als χ evenredig is met ρ volgt uit (2.402) dat het verband tussen $\frac{\bar{M}}{\rho} = \bar{M}_s$ en \bar{H} niet van ρ afhangt, wat overeenkomt met (2.412).

Naast de krachtdichtheden afgeleid van het principe van de virtuele arbeid worden in de literatuur ook de (fictieve) krachtenverdelingen die afgeleid zijn van het Chu- of het Ampère-model, beschouwd, In [Kabashima 88] en [Henneberger 92a] wordt bijvoorbeeld de krachtwerking op de magnetiseringsstroom \bar{J}_m , m.a.w. de krachtdichtheid \bar{f}_a en spanning \bar{T}_a , aangewend, terwijl men in [Hirsinger 95] uitgaat van de fictieve kracht- en koppeldichtheid \bar{f}_a en \bar{c}_a .

Naast de hier vermelde magnetische krachtdichtheden worden in de literatuur nog tal van methodes voor de berekening van zowel de totale krachten en momenten als de krachtenverdeling beschreven en met elkaar vergeleken, zoals bijvoorbeeld in [Carpenter 60] en [Müller 90].

2.7 Besluit

In dit hoofdstuk werd een methode ontwikkeld voor de bepaling van de vervorming van gemagnetiseerd materiaal. Hierbij worden de magnetische en elastische tesamen behandeld zodat we tot een

stelsel magneto-elastische vergelijkingen komen. Deze vergelijkingen kunnen zowel in een Chu- als een Ampère-formulering uitgedrukt worden, waarbij beide formuleringen volkomen equivalent zijn. De magnetische en de elastische vergelijkingen zijn ondermeer gekoppeld via de constitutieve wetten, die experimenteel bepaald moeten worden. Indien men echter niet over dergelijke experimentele gegevens beschikt, kan men zich eventueel beperken tot het bepalen van de vervorming ten gevolge van enkel de magnetische langeafstandskrachten. Deze vervorming kan berekend worden aan de hand van een (fictieve) elektromagnetische krachtdichtheid \bar{f}_{em} (2.370), een koppeldichtheid \bar{c}_{em} (2.374) en een spanning op randoppervlakken \bar{T}_{em} (2.373) die afgeleid zijn van de spanningstensor \bar{T}_{em} (2.368).

Hoofdstuk 3

Berekening van de magnetische krachtenverdeling en de vervorming in inductiemachines met behulp van de eindige-elementenmethode

3.1 Berekeningsmethodes

In dit hoofdstuk wordt de berekeningsmethode voor de vervorming ten gevolge van de magnetische langeafstandskrachtwerking, zoals uiteengezet in §2.5.8, toegepast op een inductiemachine met behulp van de tweedimensionale eindige-elementenmethode.

De magnetische langeafstandskrachtwerking kan beschreven worden aan de hand van de elektromagnetische spanningstensor \bar{T}_{em} , gegeven door (2.368):

$$\bar{T}_{em} = \bar{T}_c + \frac{\mu_0}{10} M^2 \bar{I} + \frac{\mu_0}{5} \bar{M} \bar{M} \quad (3.1)$$

$$= \bar{B} \bar{H} - \frac{\mu_0}{2} H^2 \bar{I} + \frac{\mu_0}{10} M^2 \bar{I} + \frac{\mu_0}{5} \bar{M} \bar{M} \quad (3.2)$$

De (fictieve) elektromagnetische krachtdichtheid \bar{f}_{em} en de spanning op randoppervlakken \bar{T}_{em} die met deze tensor overeenstemmen worden respectievelijk gegeven door (2.370) en (2.373):

$$\bar{f}_{em} = \bar{\nabla} \cdot \bar{T}_{em} \quad (3.3)$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \left(\bar{T}_c + \frac{\mu_0}{10} M^2 \bar{I} + \frac{\mu_0}{5} \bar{M} \bar{M} \right) \quad (3.4)$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \left(\bar{B} \bar{H} - \frac{\mu_0}{2} H^2 \bar{I} + \frac{\mu_0}{10} M^2 \bar{I} + \frac{\mu_0}{5} \bar{M} \bar{M} \right) \quad (3.5)$$

en

$$\bar{T}_{em}(\bar{n}) = \bar{T}_c - \bar{n} \cdot \left(\frac{\mu_0}{10} M^2 \bar{I} + \frac{\mu_0}{5} \bar{M} \bar{M} \right) \quad (3.6)$$

$$= \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n} - \frac{\mu_0}{10} M^2 \bar{n} - \frac{\mu_0}{5} M_n \bar{M} \quad (3.7)$$

We beschouwen hier enkel isotroop, niet-hysteretisch materiaal. In dit geval zijn de velden \bar{B} , \bar{H} en \bar{M} evenwijdig zodat de koppeldichtheid \bar{c}_{em} (2.374) nul is:

$$\bar{c}_{em} = \bar{M} \times \bar{B} = 0 \quad (3.8)$$

Verder nemen we aan dat de vervormingen voldoende klein zijn zodat de invloed van de vervorming op de (magnetische) constitutieve wet (2.375) verwaarloosbaar is. We kunnen bijgevolg gebruik maken van de 'klassieke' constitutieve wetten

$$\bar{B} = \mu(\bar{H})\bar{H} \quad (3.9)$$

of

$$\bar{H} = \nu(\bar{B})\bar{B} \quad (3.10)$$

waarbij, wegens de veronderstelde isotropie, de permeabiliteit μ en de reluctiviteit ν scalaire grootheden zijn.

De magnetische velden en de fictieve magnetische krachtenverdeling worden berekend voor de onvervormde toestand van de machine.

Uitgaande van de fictieve magnetische krachtenverdeling kan dan de vervorming worden berekend aan de hand van de elastische vergelijkingen (2.354)-(2.357). We beschouwen hierbij enkel het statisch geval, zodat de versnelling nul is ($\bar{a} = 0$). Verder beschouwen we geen uitwendige krachten die op de machine inwerken ($\bar{f}_u = 0$ en $\bar{T}_u = 0$). Aangezien er geen koppeldichtheid optreedt, is de tensor $\bar{\tau}$ symmetrisch ($\bar{M}\bar{H} - \bar{H}\bar{M} = 0$). Onder deze omstandigheden worden de vergelijkingen (2.354)-(2.357) herleid tot de vergelijkingen van de klassieke elasticiteitsleer:

$$\bar{f}_{em} + \bar{\nabla} \cdot \bar{\tau} = 0 \quad \text{in het materiaal} \quad (3.11)$$

$$\bar{n} \cdot \bar{\tau} = \bar{T}_{em} \quad \text{op de rand} \quad (3.12)$$

$$\bar{\tau} = \bar{\varepsilon} : \bar{E} \quad (3.13)$$

$$\bar{\varepsilon} = (\bar{\nabla}\bar{u})^s \quad (3.14)$$

De magnetische veld- en krachtenberekening enerzijds en de (elastische) berekening van de vervormingen anderzijds zijn in het beschouwde geval ontkoppeld. De berekeningsmethode kunnen we bijgevolg als volgt samenvatten. We beschouwen een gegeven elektrische stroomverdeling \bar{J} . Met behulp van de wetten van Maxwell (2.258)-(2.260), de constitutieve wet (3.9) of (3.10), en de magnetische randvoorwaarden worden de velden \bar{H} , \bar{B} en \bar{M} berekend. Hieruit worden de fictieve magnetische krachtdichtheid \bar{f}_{em} en de spanning op randoppervlakken \bar{T}_{em} bepaald volgens respectievelijk (3.5) en (3.7). Tenslotte worden de vervormingen (de rektensor $\bar{\varepsilon}$ en de verplaatsing \bar{u}) en de spanningstensor $\bar{\tau}$ berekend aan de hand van de elastische vergelijkingen (3.11)-(3.14) en de mechanische randvoorwaarden.

Aan de hand van de tensor $\bar{\tau}$ en de elektromagnetische spanning \bar{T}_{em} kan de spanning $\bar{\tau}(\bar{n})$, m.a.w. de kortafstandskrachtwerking die van zuiver mechanische aard wordt verondersteld (zie §2.5.8), bepaald worden. Deze spanning $\bar{\tau}(\bar{n})$ op een oppervlak met buitennormale \bar{n} in een bepaald punt wordt gegeven door:

$$\bar{\tau}(\bar{n}) = \bar{n} \cdot \bar{\tau} - \bar{T}_{em}(\bar{n}) \quad (3.15)$$

De in §2.5.8 gevolgde redenering impliceert dat de spanning $-\bar{T}_{em}(\bar{n})$ geen bijdrage levert tot de vervorming in het beschouwde punt. De spanningstoestand in een punt kan dus (benaderend) weergegeven worden aan de hand van de spanningstensor $\bar{\tau}$.

De hierboven beschreven methode steunende op de fictieve krachtenverdeling (3.5)-(3.7) wordt verder aangeduid met 'methode 1'.

Deze berekeningsmethode wordt tevens vergeleken met een methode beschreven in de literatuur, nl. de lokale toepassing van het principe van de virtuele arbeid waarbij de permeabiliteit μ evenredig is met de massadichtheid ρ . Bij lineaire materialen komt deze methode overeen met het bepalen van de krachtenverdeling aan de hand van de tensor \bar{T}_c zoals in §2.6 besproken. Deze methode, verder aangeduid met 'methode 2', kan echter ook toegepast worden op niet-lineair materiaal. We zullen hierbij rechtstreeks het principe van de virtuele arbeid toepassen, d.w.z. zonder gebruik te maken van een magnetische krachtdichtheid \bar{f} die afgeleid is van het principe van de virtuele arbeid, zoals verder wordt verduidelijkt.

Beide methodes worden geïmplementeerd met behulp van de eindige-elementenmethode zoals kort wordt besproken in de volgende paragraaf.

3.2 De eindige-elementenmethode

De eindige-elementenmethode wordt veelvuldig aangewend voor magnetische veldberekeningen zodat we op dit aspect van de berekeningsmethode niet verder ingaan.

De krachtenverdeling wordt in de eindige-elementenmethode weergegeven door middel van krachten die aangrijpen in de knopen van de eindige-elementenvermazing, de zgn. knooppuntskrachten.

Voor de twee methodes worden deze knooppuntskrachten op een verschillende wijze bepaald:

- Methode 1.

Bij deze methode worden de knooppuntskrachten afgeleid van de fictieve elektromagnetische krachtdichtheid \bar{f}_{em} . In het tweedimensionaal geval wordt de knooppuntskracht in knoop i bepaald op basis van de krachtdichtheid $\bar{f}_{em}(x, y)$ en de interpolatiefunctie $N_i(x, y)$ horende bij de i -de knoop:

$$\bar{F}_i = \int_S N_i(x, y) \bar{f}_{em}(x, y) ds \quad (3.16)$$

waarbij S het tweedimensionale domein is dat met behulp van eindige elementen wordt gemodelleerd.

Voor de praktische implementatie wordt (3.16) verder uitgewerkt afhankelijk van de gebruikte interpolatiefuncties $N_i(x, y)$. Bij lineaire interpolatiefuncties kunnen de knooppuntskrachten bijvoorbeeld bepaald worden aan de hand van de spanningen $\bar{n} \cdot \bar{T}_{em}$ op de zijden van de eindige-elementenvermazing.

Voor meer bijzonderheden over het bepalen van knooppuntskrachten in het algemeen en meer specifiek in het geval van de magnetische kracht dichtheid \bar{f}_{em} bij lineaire interpolatiefuncties verwijzen we naar [Heemers 95] en [Verhegghe].

- Methode 2.

De tweede methode steunt op de lokale toepassing van het principe van de virtuele arbeid. De knooppuntskracht in knoop i wordt hierbij bepaald door het beschouwen van een virtuele verplaatsing du_i van de knoop en de daardoor veroorzaakte verandering van de magnetostatische energie of van de coënergie, naargelang men de flux of de stroom constant houdt, zoals uiteengezet in Appendix C. Bij constante stroomverdeling \bar{J} wordt de knooppuntskracht dus als volgt bepaald:

$$\bar{F}_i = \left. \frac{dW_{co}}{d\bar{u}_i} \right|_{\bar{J}=\text{cst.}} \quad (3.17)$$

De knooppuntskrachten worden hierbij berekend door het zgn. direct afleiden van de coënergie naar de verplaatsing van de knoop, en niet door twee veldberekeningen uit te voeren voor twee posities van de knoop en het verschil in coënergie te berekenen.

De techniek van het afleiden van de coënergie naar de verplaatsing in de eindige-elementenmethode wordt uiteengezet in [Coulomb 83, Coulomb 84], waar het wordt toegepast voor het berekenen van de totale kracht en het totaal moment op een lichaam. In [Ren 92a, Ren 92b] wordt deze werkwijze ook toegepast voor het bepalen van de krachtenverdeling.

Bij de verplaatsing van een knoop vervormen de elementen waarvan de knoop deel uitmaakt, zodat hun massadichtheid verandert. Bij het berekenen van de afgeleide van de coënergie houden we hiermee rekening waarbij aangenomen wordt dat, zoals reeds vermeld, de permeabiliteit evenredig is met de massadichtheid.

Voor de praktische berekening van de knooppuntskrachten waarbij de variatie van de permeabiliteit met de vervorming in rekening wordt gebracht verwijzen we naar [Heemers 95].

Voor beide methodes worden dan op basis van de knooppuntskrachten de rekken $\bar{\epsilon}$, de verplaatsing \bar{u} en de spanningen $\bar{\tau}$ berekend met behulp van de eindige-elementenmethode, zoals uiteengezet in [Verhegghe].

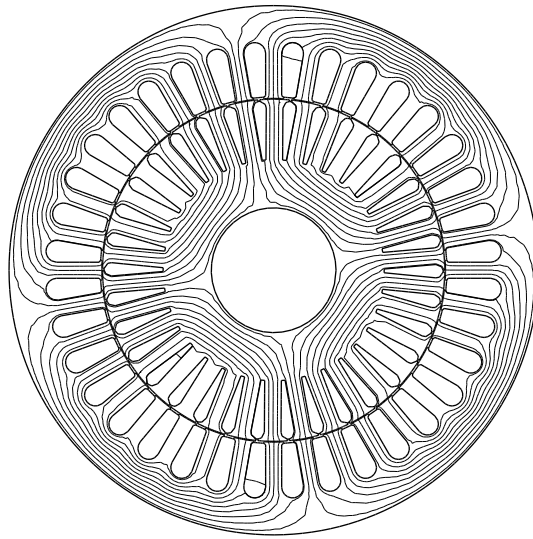
3.3 Resultaten

We beschouwen een tweedimensionaal eindige-elementenmodel van een dwarsdoorsnede van een vierpolige inductiemachine met kooianker.

Figuur 3.1 stelt de berekende fluxverdeling voor bij de gegeven stroom.

Voor de elastische berekeningen maken we gebruik van de eindige-elementenvermazing van de veldberekeningen, waarbij we echter enkel de magnetische krachten en de vervorming in de statorblik beschouwen. Het statorhuis en de statorwikkelingen worden hierbij niet in het mechanisch

model opgenomen. Dit vereenvoudigd mechanisch model laat ons echter toe de vervorming van een inductiemachine ten gevolge van de magnetische krachtwerking te illustreren en de twee methodes met elkaar te vergelijken.



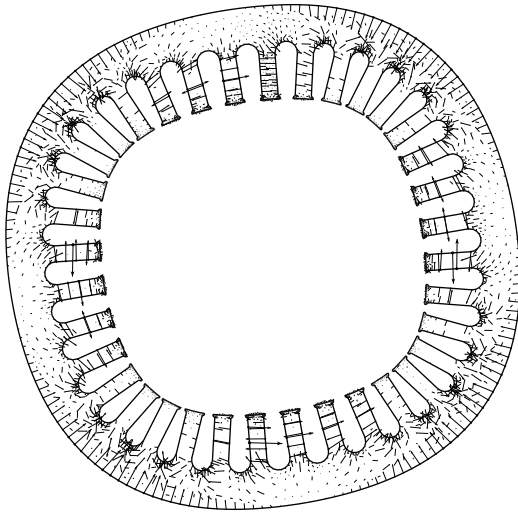
Figuur 3.1: Fluxplot

In Figuur 3.2 worden de krachtenverdelingen volgens de twee methodes voorgesteld en tevens de daaruitvolgende vervormingen, uiteraard sterk vergroot (met een factor 6500). Hieruit blijkt dat de krachtenverdeling volgens de twee methodes totaal verschillend is, terwijl de vervorming gelijkaardig is. Het verschil tussen beide krachtenverdelingen wordt duidelijk geïllustreerd in Figuren 3.3 en 3.4. Bij methode 2 bestaat de krachtwerking bijna uitsluitend uit een trekspanning uitgeoefend op de tandtoppen terwijl bij methode 1 de krachtwerking verspreid is over het volledige magnetisch materiaal.

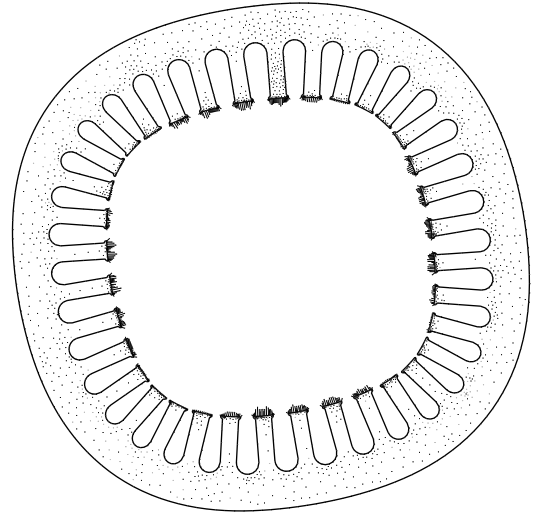
Uit Figuur 3.5 blijkt dat de knooppuntskrachten berekend op basis van de fictieve magnetische kracht dichtheid volgens methode 1 benaderend gericht zijn naar het krommingsmiddelpunt van de veldlijnen. De magnetische krachtwerking tracht als het ware het magnetisch materiaal te verplaatsen zodat de veldlijnen zouden verkorten of, m.a.w. zodat de magnetische weerstand (de reluctantie) van het magnetische circuit zou verkleinen.

De spanningstensor $\bar{\tau}$ kan voorgesteld worden door middel van de spanningen volgens de hoofdrichtingen τ_1 en τ_2 in de elementen van de eindige-elementenvermazing. Omdat we gebruik hebben gemaakt van lineaire interpolatiefuncties is de spanningstoestand in ieder element constant. Voor de voorstelling van de spanningen volgens de hoofdrichtingen maken we gebruik van de conventie die geïllustreerd wordt in Figuur 3.6 voor een positieve τ_1 (trekspanning) en een negatieve τ_2 (drukspanning).

In Figuren (3.7) en (3.8) wordt de spanningstensor $\bar{\tau}$ voorgesteld berekend volgens de twee methodes. Het verschil tussen beide methodes is vooral duidelijk merkbaar in de tanden. Wegens de magnetische spanning uitgeoefend op de tandtoppen volgens methode 2 (zie Figuur 3.4) ontstaat er volgens deze methode in de tanden een belangrijke trekspanning in de langsrichting van de tanden. Volgens methode 1 zijn de tanden echter nagenoeg spanningsvrij.



a. Methode 1



b. Methode 2

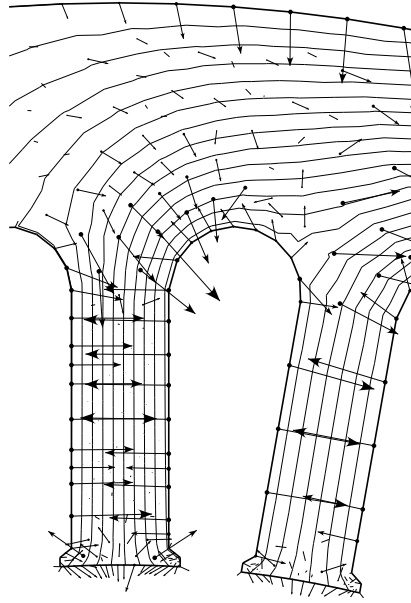
Figuur 3.2: Krachtenverdeling en vervorming volgens beide methodes

Dit verschil kan verder geïllustreerd worden door de vervorming (de rektensor $\bar{\epsilon}$), die wordt weergegeven aan de hand van de rek volgens de hoofdrichtingen, volgens dezelfde conventie als bij de spanningen. Uit Figuren (3.9) en (3.10) blijkt dat bij methode 1 de rek in de tanden te verwaarlozen is ten opzichte van de rek in het juk, terwijl er bij methode 2 een belangrijke rek in de langsrichting van de tanden optreedt.

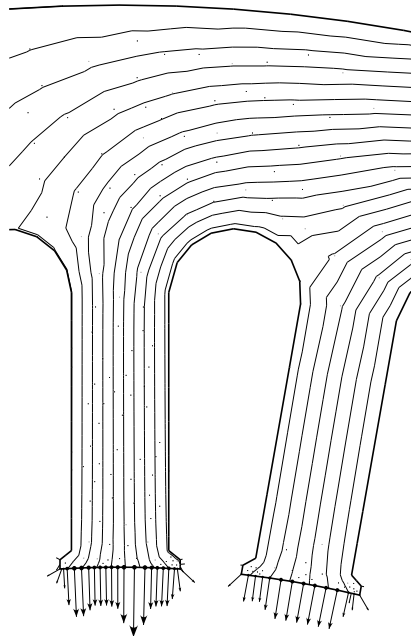
Tenslotte worden in Figuren 3.11 en 3.12 de radiale en tangentiële verplaatsing van het statoroppervlak volgens de twee methodes met elkaar vergeleken. Wat de radiale verplaatsing betreft bestaat het verschil uit een nagenoeg constante verplaatsing over de omtrek. Volgens methode 1 is er een grotere inkrumping van de stator dan bij methode 2.

De radiale verplaatsing vertoont naast de duidelijke componenten van nulde en van vierde orde ook een component van tweede orde, zoals blijkt uit Figuur 3.13 waarin de amplitudes van de Fourier-componenten van de radiale verplaatsing zijn voorgesteld.

De componenten van nulde orde (constante verplaatsing over de omtrek) en van vierde orde kunnen direct verklaard worden aan de hand van de krachtenverdeling van de vierpolige machine voorgesteld in Figuur 3.2b. Deze componenten worden dus rechtstreeks veroorzaakt door het hoofdveld. De verplaatsing van tweede orde kan verklaard worden door het gleufeffect. De beschouwde inductiemachine heeft 36 stator- en 34 rotorgleuven. Aan de hand van de draaiveldtheorie kan men eenvoudig aantonen dat door het gleufeffect een krachtgolf ontstaat met als orde het verschil tussen het aantal stator- en rotorgleuven, in dit geval dus een krachtgolf van tweede orde. Bij de tangentiële verplaatsing overheerst zelfs de component van tweede orde, zoals blijkt uit Figuur 3.12.



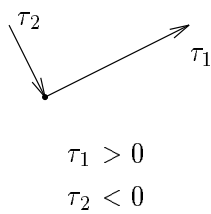
Figuur 3.3: Krachtenverdeling volgens methode 1



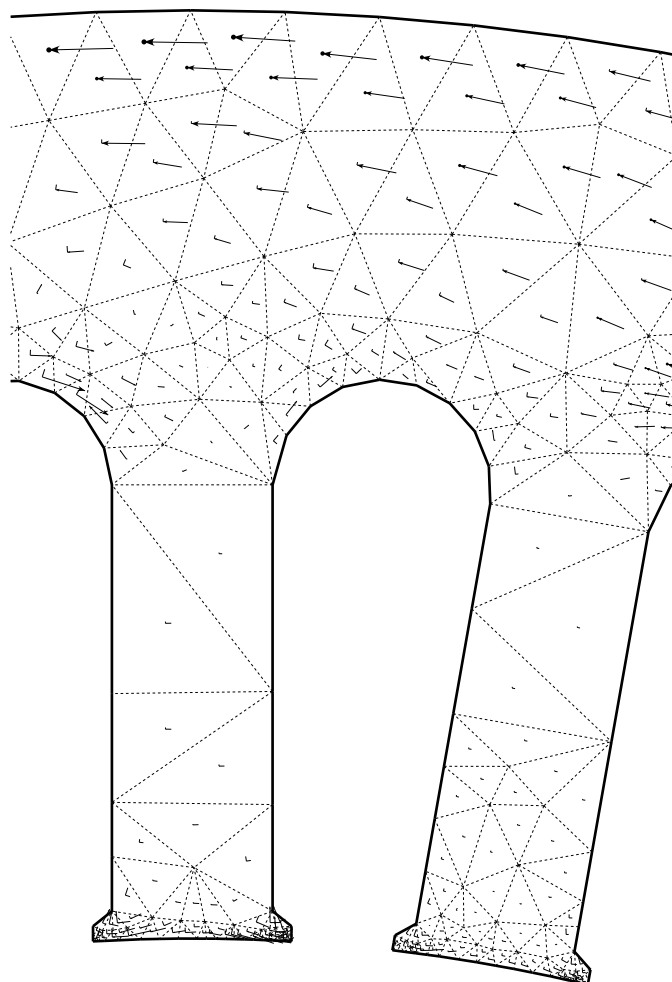
Figuur 3.4: Krachtenverdeling volgens methode 2



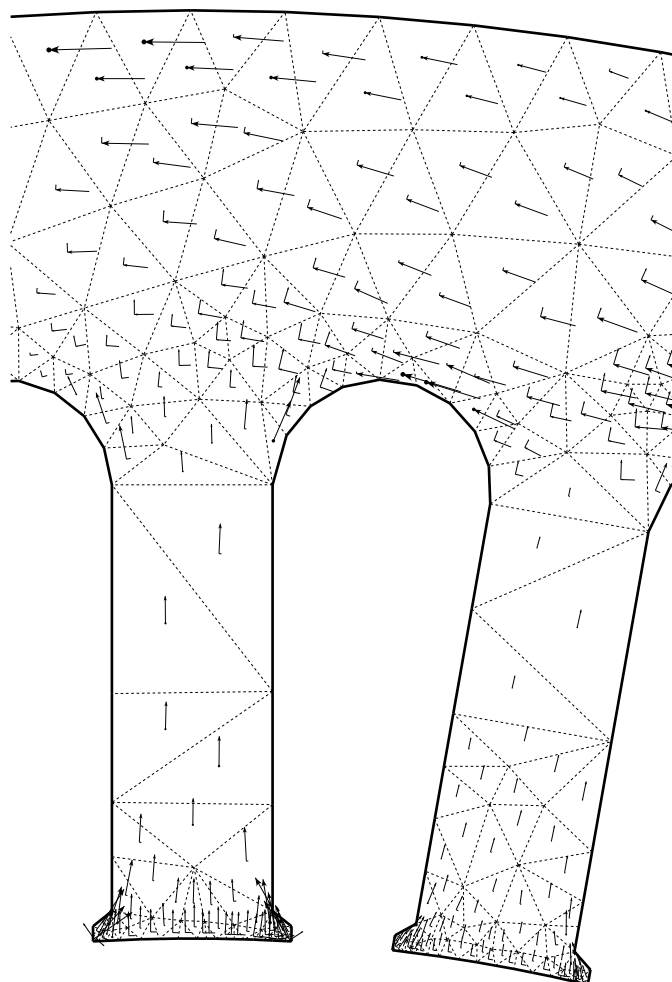
Figuur 3.5: Detail van de krachtenverdeling volgens methode 1



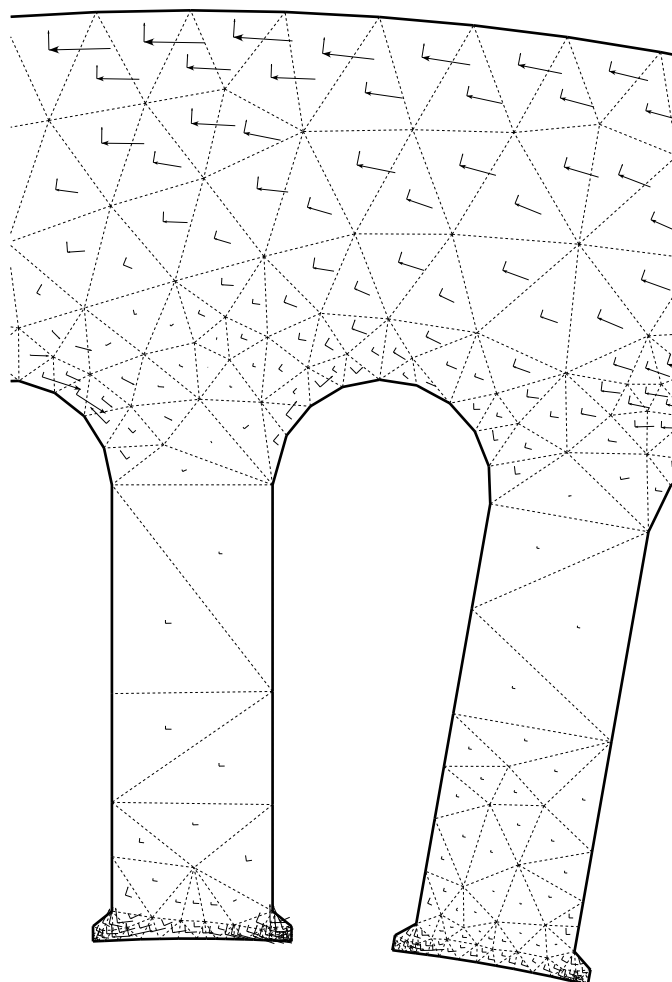
Figuur 3.6: Voorstelling van de spanningstensor



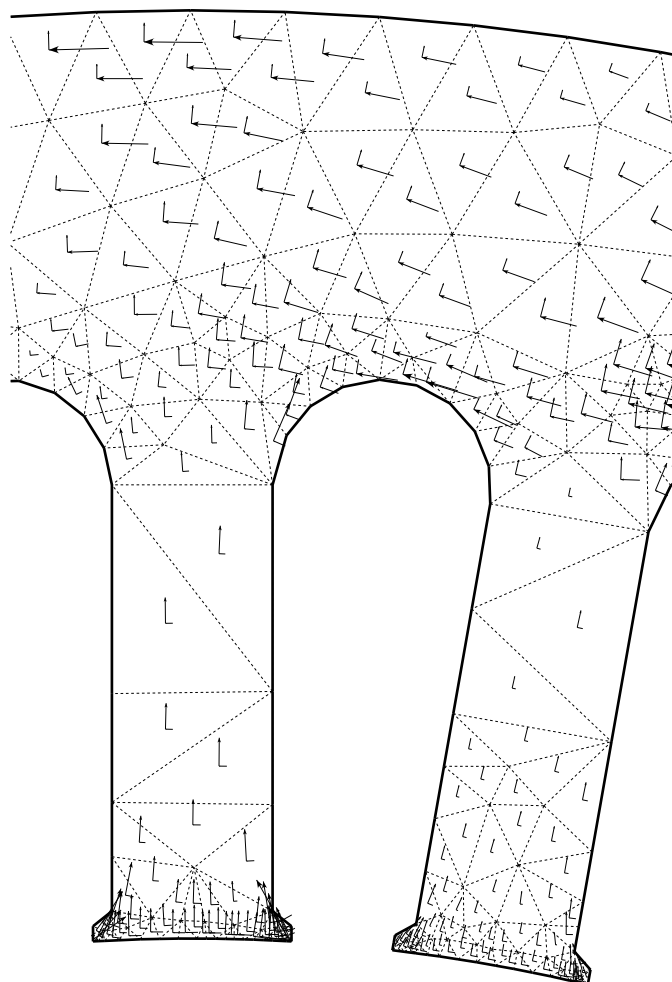
Figuur 3.7: Spanning volgens de hoofdrichtingen volgens methode 1



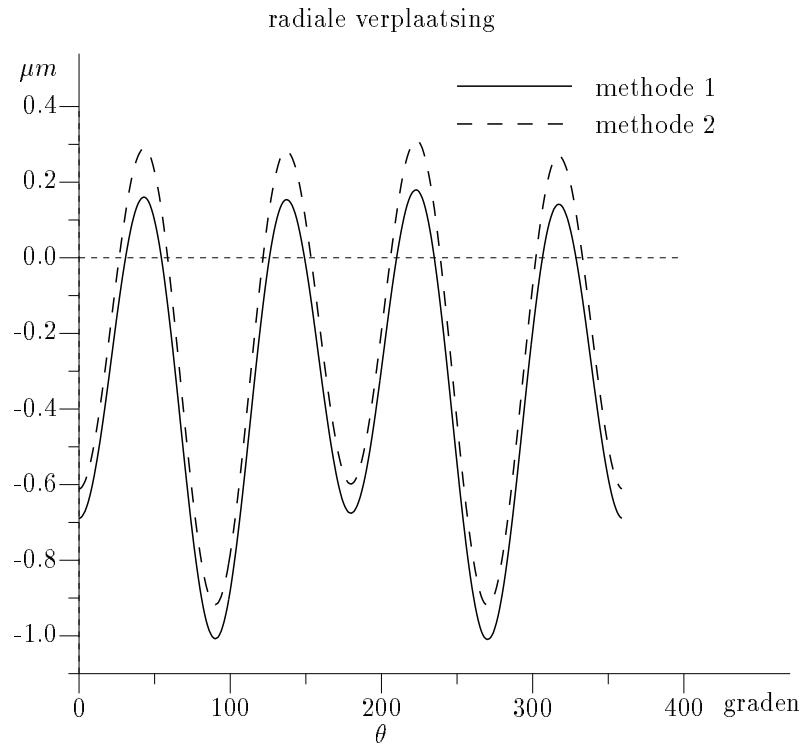
Figuur 3.8: Spanning volgens de hoofdrichtingen volgens methode 2



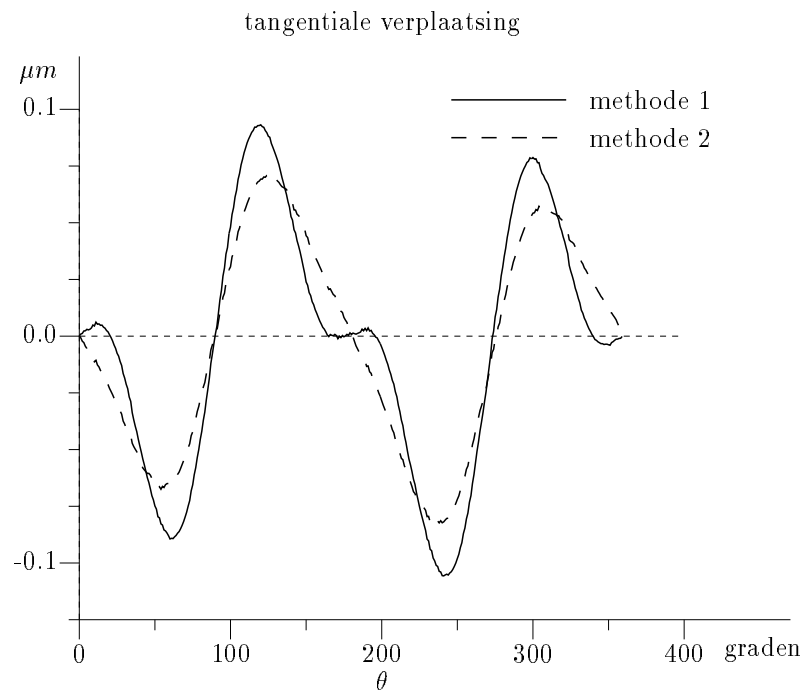
Figuur 3.9: Rek volgens de hoofdrichtingen volgens methode 1



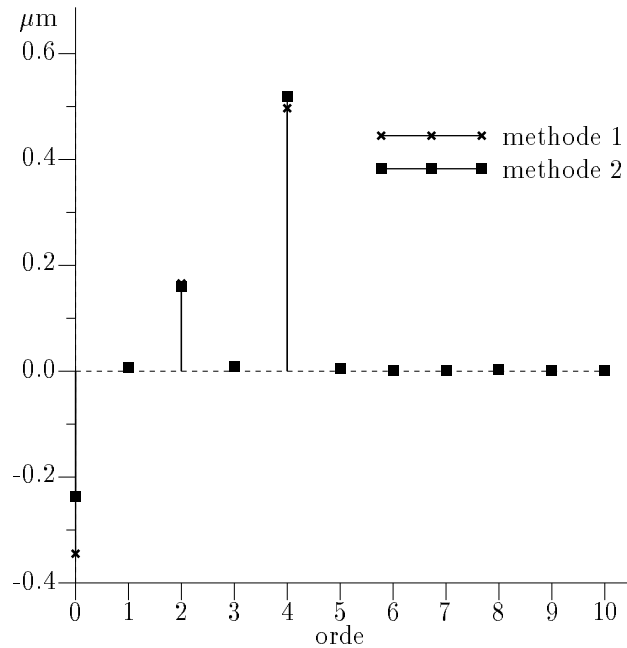
Figuur 3.10: Rek volgens de hoofdrichtingen volgens methode 2



Figuur 3.11: Radiale verplaatsing van het statoroppervlak



Figuur 3.12: Tangentiële verplaatsing van het statoroppervlak



Figuur 3.13: Fourier-componenten van de radiale verplaatsing van het statoroppervlak

3.4 Besluit

In dit hoofdstuk werd de berekeningsmethode voor het bepalen van de vervorming ten gevolge van de magnetische langeafstandskrachtwerking die in vorig hoofdstuk werd afgeleid toegepast op een inductiemachine en vergeleken met een methode steunende op de lokale toepassing van het principe van de virtuele arbeid die in de literatuur veelvuldig wordt aangewend.

Hierbij blijkt dat er, naast de totaal verschillende krachtenverdeling die beide methodes opleveren, vooral een verschil optreedt wat betreft de spanning en de rek in de statortanden en wat betreft de gemiddelde radiale verplaatsing van het statoroppervlak (de component van nulde orde).

De hier voorgestelde berekeningsmethode die steunt op de eindige-elementenmethode kan verder uitgebreid worden naar het dynamische geval waarbij het tijdsverloop van de velden, de krachten en de vervormingen en door Fourier-ontbinding ook de frequentiecomponenten van deze grootheden, kunnen worden bepaald.

Verder onderzoek op dit gebied moet uitmaken of, door het feit dat bij de twee methodes de krachten duidelijk verschillend verdeeld zijn over het statorblik, de dynamische vervormingen, m.a.w. de trillingen, significante verschillen vertonen voor beide methodes.

Hoofdstuk 4

Magnetische krachten in inductiemachines - berekenningsmethode met behulp van een netwerkmodel

4.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt de magnetische krachtwerking in inductiemachines en haar rol bij de productie van geluid en trillingen behandeld. Als uitgangspunt hiervoor is er nood aan een doeltreffend model voor het berekenen van de magnetische velden in de betreffende machines, teneinde de exciterende magnetische krachten te kunnen berekenen en analyseren. Voor magnetische veldberekeningen in het algemeen en voor veldberekeningen in draaiveldmachines, zoals inductiemachines, in het bijzonder zijn er tal van analytische en numerieke methodes beschreven in de literatuur. Principieel kan men deze methodes indelen naargelang de aangewende discretisatie in zowel de tijd als de ruimte om het veldprobleem te beschrijven. We vermelden hier kort enkele mogelijke tijds- en ruimtediscretisaties :

1. tijdsdiscretisaties

In het tijdsdomein wordt het verloop van een grootheid numeriek beschreven aan de hand van de waarde van de grootheid op een reeks tijdstippen. De waarde van de grootheid in een willekeurig tijdstip kan dan door interpolatie bepaald worden.

In het frequentiedomein daarentegen wordt het tijdsverloop beschreven aan de hand van een aantal discrete frequenties. De waarde van een grootheid op een willekeurig tijdstip is dan gelijk aan de som van de waarden van iedere frequentiecomponent op dat tijdstip.

2. ruimtediscretisaties

Om het verloop van een grootheid in de ruimte te beschrijven kan men de waarde in een discreet aantal punten beschouwen waarbij de waarde in een willekeurig punt van de ruimte bekomen wordt door interpolatie. Een voorbeeld hiervan is de eindige-elementenmethode. Voor (bijvoorbeeld) elektromagnetische systemen kan men het verloop van de stromen en de velden ook benaderen door middel van stroom- en fluxbuizen om tot een netwerkmodel met

geconcentreerde elementen te komen. Voor ruimtelijk periodieke systemen zoals bijvoorbeeld de luchtspleet van een draaiveldmachine kan men het ruimtelijk verloop van een grootheid, in casu het luchtspleetveld, beschrijven door middel van een reeks golven met verschillende ordes.

Afhankelijk van de probleemstelling moet men bijgevolg een geschikte keuze maken voor de numerieke beschrijving van het magnetisch veldprobleem, m.a.w. voor de tijds- en ruimtediscretisatie, en de daarbijhorende oplossingsmethode.

Voor veldberekeningen met het oog op het berekenen van de magnetische krachtwerking voor de analyse van geluid en trillingen bij elektrische machines is het noodzakelijk dat men alle effecten die bijdragen tot het geluids- en trillingspectrum in rekening brengt. De gekozen tijdsdiscretisatie moet hierbij de relevante frequenties van de magnetische krachtwerking - met betrekking tot de geluidsproductie zijn dit de hoorbare frequenties - kunnen beschrijven.

In het vorige hoofdstuk werd de bepaling van de magnetische velden, de (fictieve) magnetische krachtenverdeling en de daaruitvolgende vervorming van de stator aan de hand van de eindige-elementenmethode behandeld. Hierbij werd enkel het statisch geval beschouwd, waarbij de stromen in stator en rotor gegeven zijn. Door koppeling van het eindige-elementenmodel voor de veldberekening met een elektrisch netwerk, zoals bijvoorbeeld beschreven in [Lombard 93], kunnen eveneens dynamische simulaties worden uitgevoerd in het tijdsdomein (time-stepping). Deze dynamische simulaties kunnen echter een zeer aanzienlijke rekentijd vergen. Ten eerste kan een zeer groot aantal tijdsstappen vereist zijn om de relevante frequenties van de magnetische krachten weer te geven. In het bijzonder bij inductiemachines, kunnen er wegens de slip frequenties voorkomen die zeer weinig van elkaar verschillen. Om onderscheid te kunnen maken tussen deze naburige frequenties is een lange simulatieperiode nodig. Er kunnen eveneens vrij hoge frequenties voorkomen, vooral bij invertorvoeding, wat voor simulaties in het tijdsdomein resulteert in een kleine tijdsstap. Het aantal tijdsstappen nodig om zowel de naburige frequenties als de hogere frequenties nauwkeurig te modelleren, aangevuld met de tijdsstappen die men nodig heeft vooraleer de overgangsverschijnselen zijn uitgestorven, kan dus hoog oplopen. Ten tweede kan men te maken hebben met een groot aantal vrijheidsgraden van het magnetisch model (d.i. het aantal knopen van de eindige-elementenvermazing). Bij tweedimensionale eindige-elementensimulaties wordt veelal gebruik gemaakt van symmetrievorwaarden waardoor men slechts één poolpaar of één pool i.p.v. de volledige doorsnede van de machine dient te beschouwen zodat het aantal onbekenden van het op te lossen stelsel aanzienlijk gereduceerd wordt. Voor de productie van geluid en trillingen echter, kan excentriciteit van de rotor een zeer belangrijke rol spelen, zoals in volgend hoofdstuk wordt geïllustreerd. Bij excentriciteit van de rotor gaat de symmetrie verloren zodat men de volledige doorsnede van de machine moet modelleren.

De eindige-elementenmethode met time-stepping wordt bijvoorbeeld toegepast in [Witczak 96] waarbij men gebruik maakt van symmetrie om de rekentijd te beperken. De magnetische krachten op de tanden worden dan door middel van een Fourier-analyse ontbonden in componenten met verschillende frequenties en ordes. Wegens de gebruikte symmetrie is deze methode enkel bruikbaar als men geen excentriciteit beschouwt.

Een andere veel toegepaste methode voor het berekenen van de magnetische velden en de daaruitvolgende krachtwerking in inductiemachines steunt op de draaiveldtheorie en op de spanningen van Maxwell in de luchtspleet. Het luchtspleetveld wordt hierbij bepaald aan de hand van het product van de m.m.k.-golven, die de stroomverdeling in stator en rotor weergeven, en de per-

meantiegolven die de effecten van het gegeleefd zijn van stator en rotor, van excentriciteit en van verzadiging in rekening brengen. Op deze manier kunnen de verschillende factoren die van belang zijn voor de productie van geluid en trillingen in de berekeningsmethode worden opgenomen. De magnetische krachten, bepaald met behulp van de spanningen van Maxwell, worden net als het luchtspleetveld beschreven als loopgolven in de luchtspleet met verschillende frequenties en ordes. Deze methode wordt veelal aangewend om de verschillende componenten (frequenties en ordes) van de exciterende magnetische krachten te bepalen om aldus het frequentiespectrum van het geluid en de trillingen te voorspellen zonder echter de amplitude van de krachtgolven te berekenen, zoals bijvoorbeeld in [Yang 81]. In onder andere [Verma 94], [Vandeveld 94b] en [Yacamini 95] wordt de methode aangewend om de componenten van de magnetische krachten ook kwantitatief te bepalen. De berekeningsmethode steunend op m.m.k.- en permeantiegolven levert uiteraard slechts een zeer benaderend model van de inductiemachine, zeker in vergelijking met de eindige-elementenmethode.

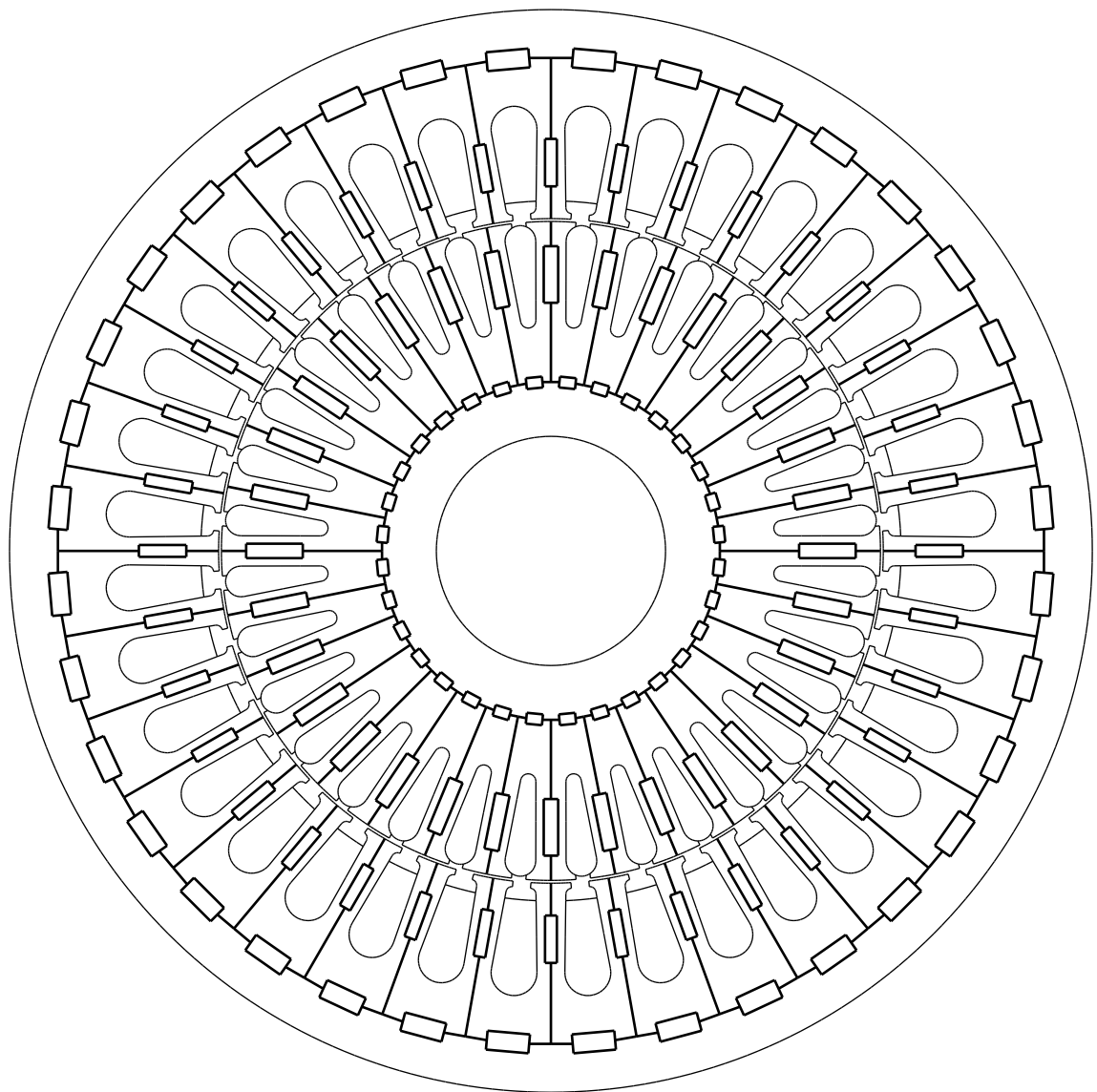
In dit hoofdstuk wordt een berekeningsmethode beschreven die steunt op een gekoppeld magnetisch-elektrisch netwerk. Door middel van een magnetisch netwerkmodel kan het magnetisch veldprobleem beduidend nauwkeuriger beschreven worden dan met de m.m.k.- en permeantiegolven van de draaiveldtheorie, zonder evenwel de nauwkeurigheid van een eindige-elementenmodel te bereiken. De berekeningsmethode is verder ontwikkeld in het frequentie-orde-domein, zoals de draaiveldtheorie. Dit betekent dat het tijdsverloop van de grootheden door middel van het frequentiespectrum en de ruimtelijke verdeling door middel van componenten van verschillende ordes wordt weergegeven, zoals verder wordt uiteengezet. De berekeningsmethode levert bijgevolg direct de verschillende componenten (frequenties, ordes en amplitudes) van de magnetische krachten, wat een voordeel is ten opzichte van berekeningsmethodes in het tijdsdomein. Als voorbeeld van het gebruik van een netwerkmodel voor de veld- en krachtberekening aan de hand van een netwerkmodel in het tijdsdomein kunnen we [Ostović 95] vermelden. Een netwerkmodel in het frequentie-orde-domein voor het berekenen van de magnetische velden en de magnetische krachten werd, voor zover mij bekend, nog niet beschreven in de literatuur.

4.2 Gekoppeld magnetisch-elektrisch netwerkmodel in het frequentie-orde-domein

In deze paragraaf wordt het principe van het gekoppeld magnetisch-elektrisch netwerkmodel in het frequentie-orde-domein voor het berekenen van de magnetische velden in een inductiemachine kort toegelicht.

Voor de opbouw van het magnetisch netwerk wordt iedere stator- en rotortand en ieder juksegment tussen twee tanden beschouwd als een fluxbuis. De magnetische inductie B in het stator- en rotorblik wordt hierbij benaderend beschreven aan de hand van de totale flux door de tanden en juksegmenten. De magnetische veldsterkte H wordt beschreven door middel van de scalaire magnetische potentiaal U , meer bepaald door de potentiaalval ΔU over de fluxbuizen die gelijk is aan de lijnintegraal van H over de betreffende fluxbuis. De fluxbuizen worden in het magnetisch netwerkmodel voorgesteld door middel van reluctanties zoals weergegeven in Figuur 4.1. Wegens de niet-lineaire B - H -karakteristiek van het stator- en rotorblik hebben deze reluctanties een niet-lineaire karakteristiek.

In de hier beschreven methode worden de velden ontbonden in frequentiecomponenten. We beschouwen nu een inductiemachine gevoed door het net. Door verzadiging komen er naast de



Figuur 4.1: Voorstelling van de tanden en het juk door reluctanties

grondfrequentie (50 Hz) ook oneven harmonischen in de magnetische inductie voor, bijvoorbeeld een derde harmonische (150 Hz). In Figuren 4.2 en 4.3 worden de fluxpatronen van de grondgolf en van de derde harmonische component op een bepaald ogenblik weergegeven, berekend met de eindige-elementenmethode. Deze componenten van het veld kunnen berekend worden aan de hand van de eindige-elementenmethode in het frequentiedomein, zoals bijvoorbeeld beschreven in [Vandeveld 94a], of door een Fourier-ontwikkeling van het fluxpatroon berekend in het tijdsdomein. Uit deze figuren blijkt dat het benaderen van het magnetische fluxpatroon door fluxbuizen, en dus door reluctanties, voor de harmonische velden duidelijk minder nauwkeurig is dan voor het hoofdveld, zeker voor wat het fluxpatroon in het juk betreft.

Nadat we het stator- en rotorblik door reluctanties hebben voorgesteld, wordt het netwerkmodel verder aangevuld om uiteindelijk te komen tot de magnetische netwerkvoorstelling van de inductiemachine weergegeven in Figuur 4.4.

Het magnetisch netwerk is opgebouwd uit respectievelijk N_s en N_r identieke stator- en rotorsectoren, elk bestaande uit een tand, een gleuf en een juksegment. Hierbij zijn Φ_{ts}^i en Φ_{js}^i respectievelijk de tand- en jukflux in de i -de statorsector en stellen \mathcal{R}_{ts}^i en \mathcal{R}_{js}^i de reluctanties van respectievelijk de statortand en het juksegment van de betreffende statorsector voor. Aangezien het magnetisch netwerk van de rotor analoog is aan dat van de stator worden hier enkel het magnetisch netwerk van de stator en de daarbij gebruikte notaties expliciet besproken.

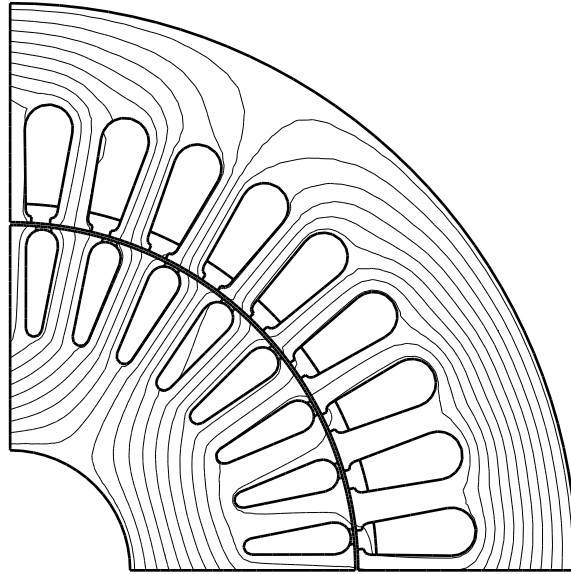
Ter hoogte van de tandtoppen splitst de statortandflux Φ_{ts} zich op in een deel Φ_{ls} dat de luchtspleet oversteekt en een deel spreidingsflux Φ_{σ_s} dat naar de naburige statortanden vloeit. Deze spreidingsflux Φ_{σ_s} omvat naast de flux die ook fysisch tussen de tandtoppen vloeit eveneens de spreidingsflux in de gleuven. De permeanties \mathcal{G}_{σ_s} die het fluxpad van het spreidingsveld weergeven vertonen door eventuele verzadiging van de tandtoppen een niet-lineair gedrag. Wat de rotor betreft kunnen aan de hand van de (niet-lineaire) spreidingspermeanties \mathcal{G}_{σ_r} zowel open als gesloten gleuven worden gemodelleerd.

Voor de magnetische potentiaal worden de volgende notaties gebruikt. De potentiaal ter hoogte van de aansluiting van de statortanden met het juk wordt verder de statorjukpotentiaal U_{js} genoemd. De potentiaal van de statortandtoppen wordt verder kortweg de statortandpotentiaal U_{ts} genoemd. Het verschil tussen de juk- en tandpotentialen in naburige statorsectoren worden respectievelijk met ΔU_{js} en ΔU_{ts} aangeduid.

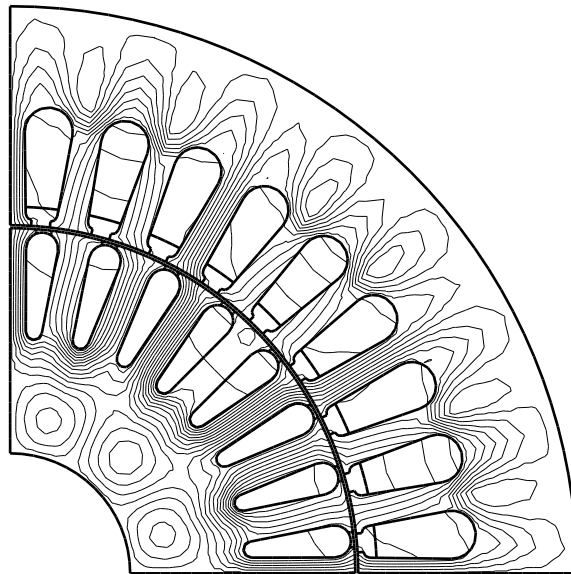
De stromen in de stator- en rotorpleuven worden in het magnetisch netwerk weergegeven door middel van de m.m.k.-bronnen \mathcal{F}_s en \mathcal{F}_r .

De magnetische netwerken van stator en rotor zijn met elkaar verbonden via het deel van de tandflux dat de luchtspleet oversteekt, met name Φ_{ls} en Φ_{lr} . In het tijdsdomein kan het luchtspleetveld beschreven worden aan de hand van discrete permeanties tussen de stator- en rotortanden, die door de rotorbeweging voortdurend wijzigen, zoals bijvoorbeeld uiteengezet in [Ostović 89]. In het frequentie-orde-domein wordt het luchtspleetveld in principe op dezelfde manier bepaald hoewel de formulering niet meer gebeurt via discrete permeanties tussen de tanden maar door middel van de permeanties van het stator- en het rotoroppervlak en van de luchtspleet die variëren in tijd en ruimte, zoals wordt uiteengezet in §4.3.4.

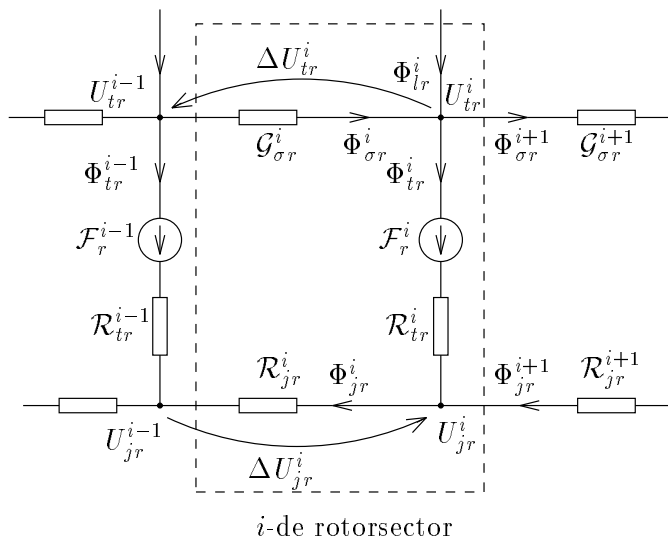
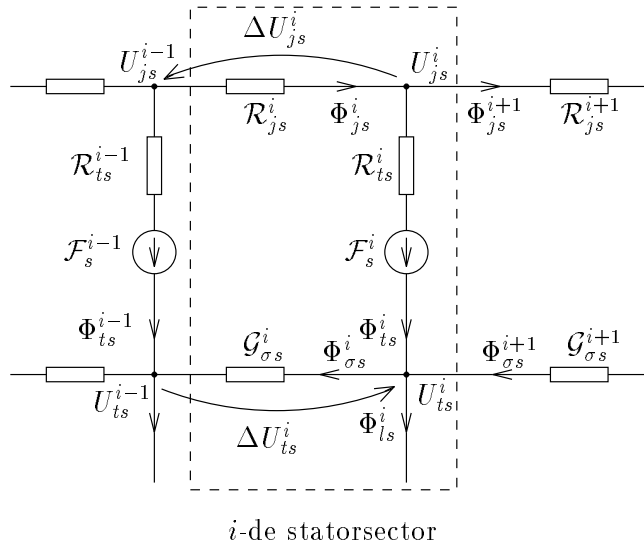
Naast de flux in de magnetische kern van de machine kan er ook een zgn. asflux voorkomen die van de stator- naar de rotorkern vloeit via het statorhuis, de lagers en de as van de machine. Hoewel de asflux voor de eenvoud niet wordt voorgesteld in Figuur 4.4, kan deze flux toch in



Figuur 4.2: Fluxpatroon van het hoofveld (50 Hz)



Figuur 4.3: Fluxpatroon van de 3^{de} harmonische (150 Hz)



Figuur 4.4: Magnetisch netwerk van een inductiemachine

het magnetisch netwerk worden geïntroduceerd mits enkele veronderstellingen aan te nemen, zoals verder in dit hoofdstuk wordt uiteengezet.

Wat het elektrisch netwerk betreft zullen in dit hoofdstuk verschillende types statorwikkelingen worden beschouwd. Voor de rotor echter zal enkel het geval van een kooianker behandeld worden. Verder zullen we enkel spanningsgevoede inductiemachines beschouwen. Zowel stator- als rotorstromen zullen dus moeten bepaald worden aan de hand van de elektrisch netwerkvergelijkingen met de aangelegde spanning als brontermen.

Vervolgens worden het magnetisch en het elektrisch netwerk wederzijds gekoppeld. De stromen in de statorwikkeling en de rotorkooi worden in het magnetisch netwerk weergegeven door m.m.k.-bronnen en in het elektrisch netwerk worden de geïnduceerde spanningen weergegeven door spanningsbronnen die bepaald worden door de tandfluxen van het magnetisch netwerk. De verschillende componenten van de magnetische inductie induceren spanningen in de statorwikkeling en de rotorkooi. Door de hierdoor opgewekte stromen worden de inducerende velden gedempt. Door de rechtstreekse koppeling van het magnetisch en het elektrisch netwerk wordt deze demping in rekening gebracht, zoals dit ook gebeurt in de methode beschreven in [Vandeveld 94b] die steunt op de draaiveldtheorie.

In de volgende paragrafen van dit hoofdstuk worden het magnetisch en het elektrisch netwerk in detail behandeld. Verder worden beide netwerken gekoppeld om tot een stelsel vergelijkingen te komen dat ons toelaat de magnetische en elektrische grootheden te berekenen. Vervolgens wordt uiteengezet hoe de magnetische krachtwerking met behulp van een netwerkmodel kan bepaald worden. Tenslotte wordt, uitgaande van de oplossing van het stelsel netwerkvergelijkingen, de bepaling van de magnetische krachtwerking in een inductiemachine behandeld.

4.3 Magnetisch netwerk

4.3.1 Ontbinding van de grootheden in componenten

Alle grootheden van het magnetisch netwerkmodel voorgesteld in Figuur 4.4 (flux, scalaire potentiaal, ...) worden in eerste instantie ontbonden in een aantal frequentiecomponenten. Het tijdsverloop van de grootheid X in de i -de sector wordt in de volgende vorm ontbonden:

$$X^i(t) = \sum_k \Re \left(\bar{X}_k^i e^{j\omega_k t} \right) \quad ; \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (4.1)$$

met

$$N = N_s \quad \text{voor statorgrootheden} \quad (4.2)$$

$$N = N_r \quad \text{voor rotorgrootheden} \quad (4.3)$$

en waarbij \bar{X}_k^i de complexe voorstelling van de component met pulsatie ω_k in de i -de sector is.

In tweede instantie wordt voor iedere frequentiecomponent k de ruimtelijke verdeling van de complexe grootheden \bar{X}_k^i ontbonden in een reeks componenten met ruimtelijke orde κ .

$$\bar{X}_k^i = \sum_{\kappa} \bar{X}_{k\kappa} e^{-j\kappa \frac{2\pi}{N} i} \quad (4.4)$$

$$= \sum_{\kappa} \bar{X}_{k\kappa} e^{-j\kappa\alpha i} \quad (4.5)$$

waarbij

$$\alpha = \frac{2\pi}{N} \quad (4.6)$$

de ruimtelijke hoek is tussen twee opeenvolgende sectoren. Voor de stator en de rotor voeren we de volgende notaties in:

$$\alpha_s = \frac{2\pi}{N_s} \quad (4.7)$$

$$\alpha_r = \frac{2\pi}{N_r} \quad (4.8)$$

Het verloop in tijd en ruimte van de grootheid X wordt aldus geformuleerd in de volgende vorm:

$$X^i(t) = \sum_k \Re \left(\sum_{\kappa} \bar{X}_{k\kappa} e^{-j\kappa\alpha i} e^{j\omega_k t} \right) \quad (4.9)$$

$$= \sum_k \sum_{\kappa} \Re \left(\bar{X}_{k\kappa} e^{j(\omega_k t - \kappa\alpha i)} \right) \quad (4.10)$$

De ontbindingen van het tijdsverloop in frequentiecomponenten en van de ruimtelijke verdeling in ordes verschillen van elkaar in die zin dat de frequenties niet noodzakelijk het veelvoud zijn van een grondfrequentie, m.a.w. het tijdsverloop is niet noodzakelijk periodiek, terwijl het verloop in de ruimte noodzakelijkerwijze periodiek is. De sector $i + aN$ valt immers als het ware samen met sector i .

Voor de numerieke modellering van de inductiemachine zullen we ons beperken tot een aantal frequenties, en per frequentie tot een aantal ordes. De grootheden worden dus ontbonden in een aantal componenten volgens

$$X^i(t) = \sum_{k=1}^{N_x} \Re \left(\bar{X}_k e^{j(\omega_k t - \kappa_k \alpha i)} \right) \quad (4.11)$$

waarbij elke component k gekenmerkt wordt door :

- $\omega_k = 2\pi f_k$: de pulsatie
- κ_k : de (ruimtelijke) orde
- \bar{X}_k : de complexe waarde

Een component wordt hierbij door slechts één index k aangeduid die zowel de pulsatie ω_k als de orde κ_k bepaalt.

Om te voorkomen dat we voor de modellering van de machine verschillende componenten in aanmerking nemen die een gelijkaardig verloop in tijd en ruimte voorstellen, worden aan de componenten (ω_k, κ_k) een aantal eisen gesteld.

Ten eerste leveren twee componenten l en k hetzelfde verloop in tijd en ruimte op als zowel hun pulsatie als hun orde tegengesteld zijn en hun waarden complex toegevoegd zijn:

$$(\omega_k, \kappa_k) = -(\omega_l, \kappa_l) \quad (4.12)$$

$$\bar{X}_k = \bar{X}_l^* \quad (4.13)$$

Ten tweede zijn wegens de ruimtelijke periodiciteit twee componenten l en k gelijkwaardig als het verschil van hun ordes een N -voud is, en hun pulsatie en waarde gelijk zijn:

$$(\omega_k, \kappa_k) = (\omega_l, \kappa_l + aN) \quad (4.14)$$

$$\bar{X}_k = \bar{X}_l \quad (4.15)$$

Twee componenten zijn dus equivalent, d.i. kunnen elkaar vervangen mits ze de gepaste complexe waarde toe te kennen, als ze voldoen aan:

$$(\omega_k, \kappa_k) = \pm(\omega_l, \kappa_l + aN) \quad (4.16)$$

We kunnen bijgevolg de volgende voorwaarden opleggen aan de componenten:

- $\omega_k \geq 0 \text{ rad/s}$ (4.17)

- – voor $\omega_k > 0 \text{ rad/s}$:

$$0 \leq \kappa_k \leq N - 1 \quad (4.18)$$

- voor $\omega_k = 0 \text{ rad/s}$:

$$\begin{cases} 0 \leq \kappa_k \leq \frac{N}{2} & \text{als } N \text{ even is} \\ 0 \leq \kappa_k \leq \frac{N-1}{2} & \text{als } N \text{ oneven is} \end{cases} \quad (4.19)$$

Aan de hand van de uitdrukking (4.16) voor equivalente componenten kan men eenvoudig nagaan dat enerzijds een willekeurige component (ω, κ) kan omgevormd worden tot een component die aan de gestelde eisen voldoet en dat anderzijds twee verschillende toegelaten componenten nooit equivalent zijn.

Het bepalen van de componenten (frequenties en ordes) die in de machine aanwezig zijn wordt, na de beschrijving van het magnetisch en het elektrisch netwerk, behandeld in §4.7. Hierbij wordt een lijst opgesteld met de componenten van de variabelen, met name de flux Φ , de scalaire potentiaal U en de m.m.k.-bronnen \mathcal{F} . Voor de stator en de rotor bekomen we respectievelijk de reeksen ¹

$$(\omega_{\phi s_k}, \kappa_{\phi s_k}) \quad ; \quad k = 1, \dots, N_{\phi s} \quad (4.20)$$

en

$$(\omega_{\phi r_k}, \kappa_{\phi r_k}) \quad ; \quad k = 1, \dots, N_{\phi r} \quad (4.21)$$

die aan de gestelde voorwaarden (4.17)-(4.19) voldoen. Elke statorgrootheid, bijvoorbeeld de tandflux $\bar{\Phi}_{ts}$, geeft dus aanleiding tot $N_{\phi s}$ onbekenden :

$$\bar{\Phi}_{ts_k} \quad ; \quad k = 1, \dots, N_{\phi s} \quad (4.22)$$

De parameters van het magnetisch netwerk, met name de magnetische reluctanties en permeanties, worden op dezelfde manier in componenten ontbonden. De reluctanties en permeanties worden in het vervolg steeds als volgt geformuleerd:

$$\mathcal{R}^i(t) = \sum_{k=-N_{\mathcal{R}}}^{N_{\mathcal{R}}} \bar{\mathcal{R}}_k e^{j(\omega_k t - \kappa_k \alpha i)} \quad (4.23)$$

waarbij

$$(\omega_{-k}, \kappa_{-k}) = -(\omega_k, \kappa_k) \quad (4.24)$$

$$\bar{\mathcal{R}}_{-k} = \bar{\mathcal{R}}_k^* \quad (4.25)$$

¹Omdat we na het opstellen van de vergelijkingen en na eliminatie van de onbekenden U en \mathcal{F} nog enkel de fluxen Φ als onbekenden zullen overhouden, gebruiken we hier de index ϕ om de componenten van de onbekenden van het magnetisch netwerk aan te duiden.

zodat de som van de complexe componenten k en $-k$ steeds reëel is. Voor positieve waarden van k voldoen de pulsatie en orde van de componenten (ω_k, κ_k) aan de voorwaarden (4.17)-(4.19). De component $k = 0$ met

$$(\omega_0, \kappa_0) = (0, 0) \quad (4.26)$$

geeft de gemiddelde waarde (in tijd en ruimte) weer en zijn waarde $\bar{\mathcal{R}}_0$ is reëel.

Er wordt voor stator en rotor bijgevolg een tweede lijst opgesteld, ditmaal met de componenten van de reluctanties en permeanties :

$$(\omega_{\mathcal{R}_{s_k}}, \kappa_{\mathcal{R}_{s_k}}) \quad ; \quad k = 0, \dots, N_{\mathcal{R}_s} \quad (4.27)$$

en

$$(\omega_{\mathcal{R}_{r_k}}, \kappa_{\mathcal{R}_{r_k}}) \quad ; \quad k = 0, \dots, N_{\mathcal{R}_r} \quad (4.28)$$

4.3.2 Bepaling van de reluctanties en permeanties

In het magnetisch netwerkmodel wordt het stator- en rotorblik voorgesteld door middel van de reluctanties van de tanden \mathcal{R}_{ts} en \mathcal{R}_{tr} en de reluctanties van de juksegmenten \mathcal{R}_{js} en \mathcal{R}_{jr} . Deze reluctanties worden bepaald door de geometrie van de tanden en de juksegmenten en door de B - H -karakteristiek van het materiaal. Men kan hiervoor beroep doen op verschillende benaderingen.

Een vereenvoudigde geometrische voorstelling van de elementen van het magnetisch circuit wordt bijvoorbeeld bekomen door de fluxbuizen te benaderen door balken met een karakteristieke lengte, breedte en diepte, met een uniform B - en H -veld en dus met een reluctiviteit $\nu = \frac{H}{B}$ die constant is over de volledige fluxbuis.

De geometrie van (bijvoorbeeld) de statortanden wordt aldus bepaald door hun lengte l_{ts} , breedte b_{ts} en diepte l'_a , die gelijk is aan de axiale lengte van de machine gereduceerd met de stapelfactor van het blikpakket. De reluctantie van de i -de statortand in functie van de flux door die tand wordt bijgevolg gegeven door:

$$\mathcal{R}_{ts}^i(\Phi_{ts}^i) = \frac{l_{ts}}{b_{ts}l'_a} \nu^i(B_{ts}^i) \quad (4.29)$$

waarbij de reluctiviteit ν^i bepaald wordt door de B - H -karakteristiek van het ijzer en aldus afhangt van de magnetische inductie gegeven door:

$$B_{ts}^i = \frac{\Phi_{ts}^i}{b_{ts}l'_a} \quad (4.30)$$

In het frequentie-orde-domein worden zowel de flux als de reluctantie beschreven aan de hand van componenten met verschillende frequenties en ordes. Om de componenten van de reluctantie bij gegeven componenten van de flux te berekenen, wordt in de verschillende tanden het verloop van de flux in de tijd bepaald op basis van de componenten van de tandflux. Voor iedere waarde van

de flux in de verschillende tanden en op de verschillende tijdstippen wordt de reluctantie bepaald aan de hand van (4.29). Door middel van een tweedimensionale Fourier-ontwikkeling van deze reluctanties worden tenslotte de verschillende componenten van de reluctantie bekomen.

Op analoge wijze kunnen de reluctanties van de statorjuksegmenten \mathcal{R}_{js} en van de rotortanden en -juksegmenten \mathcal{R}_{tr} en \mathcal{R}_{jr} bepaald worden.

De permeanties \mathcal{G}_{σ_s} en \mathcal{G}_{σ_r} kunnen eveneens bepaald worden door aan het fluxpad tussen de naburige tanden een karakteristieke lengte, breedte en diepte toe te kennen. Hieraan dient dan nog de permeantie van de gleufspreiding toegevoegd te worden. Het spreidingsveld in de gleuven kan hierbij analytisch bepaald worden zoals bijvoorbeeld uiteengezet in [Melkebeek].

Voor een meer uitgebreide bespreking van het bepalen van de reluctanties en permeanties van een magnetisch netwerkmodel kunnen we verwijzen naar [Ostović 89].

4.3.3 Flux-potentiaal-vergelijkingen voor reluctanties en permeanties in het frequentie-orde-domein

4.3.3.1 Potentiaalval over de reluctanties i.f.v. de flux

De magnetische potentiaalval ΔU over de reluctanties \mathcal{R} van het netwerkmodel wordt gegeven door:

$$\Delta U = \mathcal{R} \Phi \quad (4.31)$$

In het frequentie-orde-domein worden de componenten van de potentiaalval ΔU bepaald op basis van de componenten van de flux Φ en van de reluctantie \mathcal{R} .

We beschouwen hiertoe een willekeurige fluxcomponent met pulsatie ω_l , orde κ_l en complexe waarde $\bar{\Phi}_l$. Het overeenkomstige fluxpatroon kunnen we als volgt formuleren:

$$\Phi^i(t) = \Re \left(\bar{\Phi}_l e^{j(\omega_l t - \kappa_l \alpha i)} \right) \quad (4.32)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\bar{\Phi}_l e^{j(\omega_l t - \kappa_l \alpha i)} + \bar{\Phi}_l^* e^{-j(\omega_l t - \kappa_l \alpha i)} \right) \quad (4.33)$$

Aan de hand van de uitdrukking van de reluctantie $\mathcal{R}^i(t)$ gegeven door (4.23) bekomt men het verloop van de potentiaalval ΔU veroorzaakt door de beschouwde fluxcomponent $\bar{\Phi}_l$:

$$\Delta U^i(t) = \mathcal{R}^i(t) \Phi^i(t) \quad (4.34)$$

$$= \sum_{k=-N_{\mathcal{R}}}^{N_{\mathcal{R}}} \Re \left(\bar{\mathcal{R}}_k \bar{\Phi}_l e^{j[(\omega_k + \omega_l)t - (\kappa_k + \kappa_l)\alpha i]} \right) \quad (4.35)$$

$$= \sum_m \Re \left(\Delta \bar{U}_m e^{j(\omega_m t - \kappa_m \alpha i)} \right) \quad (4.36)$$

waarbij de componenten (ω_m, κ_m) voldoen aan de gestelde eisen (4.17)-(4.19).

Op basis hiervan kunnen de complexe waarden $\Delta\bar{U}_m$ van de componenten (ω_m, κ_m) van de potentiaalval veroorzaakt door de de beschouwde fluxcomponent (4.32) als volgt geschreven worden als functie van $\bar{\Phi}_l$:

$$\Delta\bar{U}_m = \bar{\bar{\mathcal{R}}}_{ml} \cdot \bar{\Phi}_l \quad (4.37)$$

of in matrixnotatie:

$$\{\Delta U_m\} = [\mathcal{R}_{ml}] \{\Phi_l\} \quad (4.38)$$

met

$$\{\Delta U_m\} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta U_{mr} \\ \Delta U_{mi} \end{array} \right\} ; \quad \{\Phi_l\} = \left\{ \begin{array}{c} \Phi_{lr} \\ \Phi_{li} \end{array} \right\} \quad (4.39)$$

en

$$\Delta\bar{U}_m = \Delta U_{mr} + j\Delta U_{mi} \quad ; \quad \bar{\Phi}_l = \Phi_{lr} + j\Phi_{li} \quad (4.40)$$

De reluctantiematrixes $[\mathcal{R}_{ml}]$ (en de corresponderende tensoren $\bar{\bar{\mathcal{R}}}_{ml}$) worden als volgt opgesteld. Men beschouwt alle componenten van de reluctantie $\mathcal{R} : k = -N_{\mathcal{R}}, \dots, N_{\mathcal{R}}$.

Een reluctantiecomponent k die de volgende voorwaarden vervult:

$$(\omega_m, \kappa_m) = (\omega_k + \omega_l, \kappa_k + \kappa_l + aN) \quad (4.41)$$

veroorzaakt volgens (4.35) een spanningsval met pulsatie ω_m en orde κ_m gegeven door

$$\Delta\bar{U}_{m,k} = \bar{\mathcal{R}}_k \bar{\Phi}_l \quad (4.42)$$

en levert aldus de volgende bijdrage tot de reluctantiematrix $[\mathcal{R}_{ml}]$:

$$[\mathcal{R}_{ml}]_k = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{kr} & -\mathcal{R}_{ki} \\ \mathcal{R}_{ki} & \mathcal{R}_{kr} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Anderzijds levert een reluctantiecomponent k die voldoet aan

$$(\omega_m, \kappa_m) = -(\omega_k + \omega_l, \kappa_k + \kappa_l + aN) \quad (4.44)$$

de volgende bijdragen tot respectievelijk $\Delta\bar{U}_m$ en $[\mathcal{R}_{ml}]$

$$\Delta\bar{U}_{m,k} = (\bar{\mathcal{R}}_k \bar{\Phi}_l)^* \quad (4.45)$$

$$[\mathcal{R}_{ml}]_k = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{kr} & -\mathcal{R}_{ki} \\ -\mathcal{R}_{ki} & -\mathcal{R}_{kr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{-kr} & \mathcal{R}_{-ki} \\ \mathcal{R}_{-ki} & -\mathcal{R}_{-kr} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Beschouwen we nu bijvoorbeeld de potentiaalval in het statorjuk ΔU_{js} . De componenten van ΔU_{js} kunnen aan de hand van de hier beschreven werkwijze uitgedrukt worden in functie van de componenten van de jukflux :

$$\Delta \bar{U}_{j_{sm}} = \sum_{l=1}^{N_{\phi s}} \bar{\mathcal{R}}_{j_{sml}} \cdot \bar{\Phi}_{j_{sl}} \quad ; \quad m = 1, \dots, N_{\phi s} \quad (4.47)$$

waarbij de tensoren $\bar{\mathcal{R}}_{j_{sml}}$ functie zijn van de reluctantiecomponenten $\bar{\mathcal{R}}_{j_{sk}}$; $k = 0, \dots, N_{\mathcal{R}S}$.

4.3.3.2 Flux door de permeanties i.f.v. de potentiaalval

De relatie tussen de flux door en de magnetische potentiaalval over een fluxbuis kan eveneens beschreven worden door middel van de permeantie \mathcal{G} :

$$\Phi = \mathcal{G} \Delta U \quad (4.48)$$

Op analoge wijze als in vorige paragraaf kunnen de verschillende componenten van de flux Φ bepaald worden op basis van de componenten van de potentiaalval ΔU en van de permeantie \mathcal{G} .

Bijvoorbeeld, de spreidingsflux ter hoogte van de tandtoppen van de stator kan als volgt geschreven worden in functie van het potentiaalverschil tussen de statortanden:

$$\bar{\Phi}_{\sigma sm} = \sum_{l=1}^{N_{\phi s}} \bar{\mathcal{G}}_{\sigma sml} \cdot \Delta \bar{U}_{tsl} \quad ; \quad m = 1, \dots, N_{\phi s} \quad (4.49)$$

waarbij de tensoren $\bar{\mathcal{G}}_{\sigma sml}$ functie zijn van de permeantiecomponenten $\bar{\mathcal{G}}_{\sigma sk}$; $k = 0, \dots, N_{\mathcal{R}S}$.

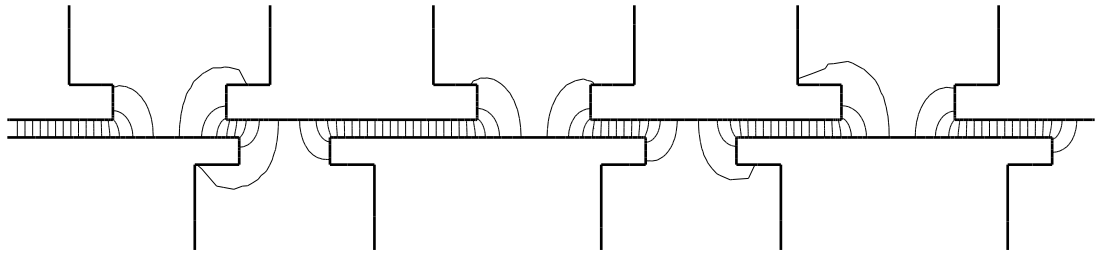
4.3.4 Modelling van de luchtspleet

Terwijl de flux in stator en rotor beschreven wordt door middel van de fluxen in een discreet aantal sectoren, met name de N_s stator- en de N_r rotorsectoren, wordt de luchtspleetflux geschreven als functie van de hoek θ , uitgedrukt in (mechanische) radialen, waarbij de positie $\theta = 0$ gekozen wordt in het midden van statortand 0. We beschouwen verder een referentiestelsel vast aan de rotor θ_r , waarbij $\theta_r = 0$ overeenkomt met het midden van rotortand 0. Het verband tussen θ en θ_r wordt bepaald door de hoeksnelheid van de rotor Ω , die constant wordt verondersteld:

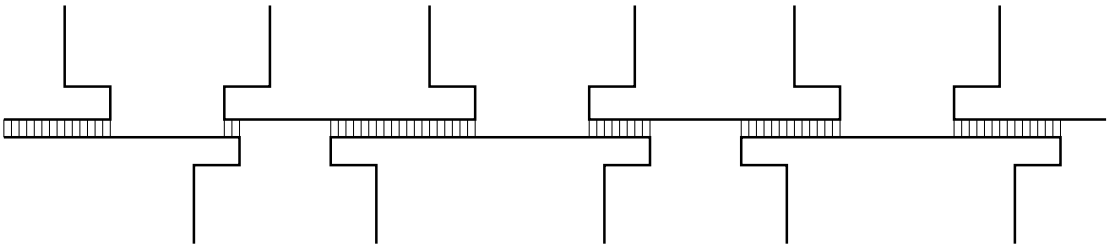
$$\theta_r = \theta - \Omega t \quad (4.50)$$

4.3.4.1 Geïdealiseerd model

In Figuur 4.5.a wordt het luchtspleetveld weergegeven, berekend met behulp van de eindige-elementenmethode, waarbij er een constant potentiaalverschil tussen de stator en de rotor wordt opgelegd. Waar stator- en rotortanden overlappen is het luchtspleetveld nagenoeg uniform. We



a. Luchtspleetveld met inbegrip van het fringing-effect



b. Het geïdealiseerd model

Figuur 4.5: Het luchtspleetveld

beschouwen nu het geïdealiseerd model voorgesteld in Figuur 4.5.b waarbij enkel dit uniform veld tussen de overlappende tanden in rekening gebracht wordt en waarbij het fringing-effect, dat in Figuur 4.5.a duidelijk wordt geïllustreerd, verwaarloosd wordt.

Om de flux die de luchtspleet oversteekt te bepalen in functie van de potentiaal van de stator- en rotortanden, gaan we uit van deze geïdealiseerde voorstelling van de magnetische inductie in de luchtspleet.

Waar een statortand i en een rotortand k overlappen wordt de inductie in de luchtspleet gegeven door:

$$B = \frac{\mu_0}{\delta}(U_s^i - U_r^k) \quad (4.51)$$

waarbij U_s^i en U_r^k de magnetische scalaire potentialen van respectievelijk de stator- en de rotortand zijn en δ de luchtspleetlengte is. Hierbij wordt enkel de radiale component in aanmerking genomen en wordt de positieve zin voor de inductie van stator naar rotor gekozen.

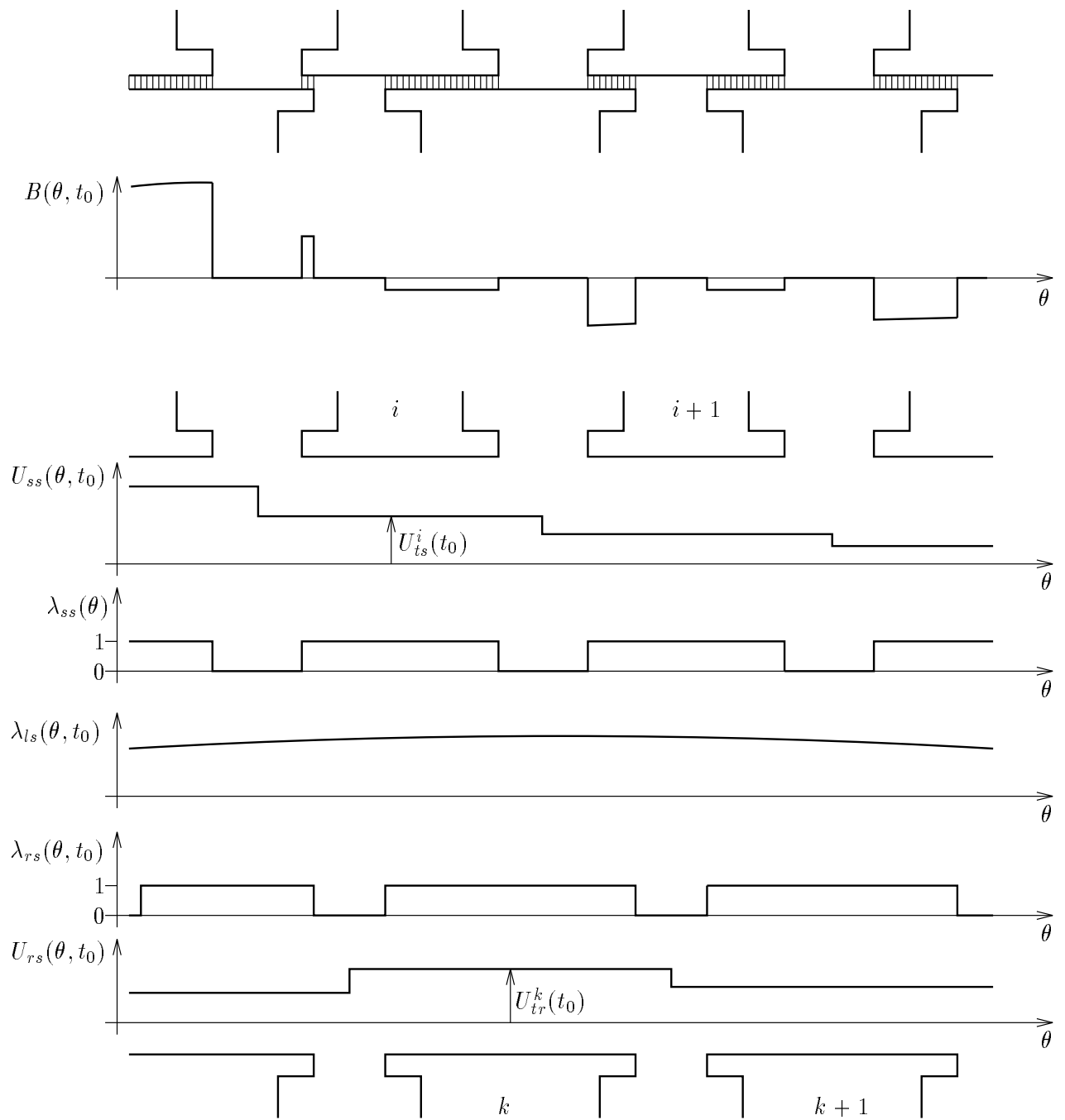
Ter hoogte van een stator- en/of rotorgleuf is het luchtspleetveld nul.

Dit geïdealiseerde luchtspleetveld kan als volgt wiskundig beschreven worden, zie Figuur 4.6.

Voor het statoroppervlak stelt men per sector de potentiaal U_{ss} over de *gehele* tandsteek gelijk aan de potentiaal van de statortand U_{ts}^i :

$$U_{ss}(\theta, t) = U_{ts}^i(t) \quad \text{voor} \quad \frac{2\pi}{N_s}i - \frac{\pi}{N_s} < \theta < \frac{2\pi}{N_s}i + \frac{\pi}{N_s} \quad (4.52)$$

Analoog wordt de potentiaal van het rotoroppervlak in het meedraaiend assenstelsel gegeven



Figuur 4.6: Geïdealiseerd model van de luchtspleetveld

door:

$$U_{rr}(\theta_r, t) = U_{tr}^k(t) \quad \text{voor} \quad \frac{2\pi}{N_r}k - \frac{\pi}{N_r} < \theta_r < \frac{2\pi}{N_r}k + \frac{\pi}{N_r} \quad (4.53)$$

zodat de rotorpotentiaal ten opzichte van een waarnemer vast aan de stator, m.a.w. in functie van de hoek θ , gegeven wordt door:

$$U_{rs}(\theta, t) = U_{tr}^k(t) \quad \text{voor} \quad \frac{2\pi}{N_r}i - \frac{\pi}{N_r} + \Omega t < \theta < \frac{2\pi}{N_r}k + \frac{\pi}{N_r} + \Omega t \quad (4.54)$$

Verder definiëren we de (dimensieloze) permeantie van het statoroppervlak, of kortweg statorpermeantie, λ_{ss} die gelijk is aan 1 ter hoogte van de statortanden en gelijk is aan 0 ter hoogte van de statorgleuven:

$$\lambda_{ss}(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{voor} \quad \frac{2\pi}{N_s}i - \gamma_s \frac{\pi}{N_s} < \theta < \frac{2\pi}{N_s}i + \gamma_s \frac{\pi}{N_s} \\ 0 & \text{voor} \quad \frac{2\pi}{N_s}i + \gamma_s \frac{\pi}{N_s} < \theta < \frac{2\pi}{N_s}(i+1) - \gamma_s \frac{\pi}{N_s} \end{cases} \quad (4.55)$$

waarbij γ_s de verhouding is van de breedte van de statortanden en de tandsteek, zoals aangeduid in Figuur 4.7 a.

Op analoge wijze wordt de permeantie van het rotoroppervlak t.o.v. een waarnemer vast aan de rotor $\lambda_{rr}(\theta_r)$ en de corresponderende rotorpermeantie t.o.v. een waarnemer vast aan de stator $\lambda_{rs}(\theta, t)$ gedefinieerd.

Het luchtspleetveld is verder omgekeerd evenredig met de luchtspleetlengte δ . Wanneer de rotorpositie zowel statische als dynamische excentriciteit vertoont wordt de luchtspleetlengte gegeven door:

$$\delta_s(\theta, t) = \delta_0 + \Re(\bar{\varepsilon}_s e^{-j\theta}) + \Re(\bar{\varepsilon}_d e^{j(\Omega t - \theta)}) \quad (4.56)$$

We kunnen nu de luchtspleetpermeantie als volgt definiëren en in een Fourier-reeks ontbinden²:

$$\lambda_{ls}(\theta, t) = \frac{\mu_0}{\delta_s(\theta, t)} \quad (4.57)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\lambda}_{l_k} e^{j(\omega_{ls_k} t - \nu_{ls_k} \theta)} \quad (4.58)$$

waarbij

$$(\omega_{ls_{-k}}, \nu_{ls_{-k}}) = -(\omega_{ls_k}, \nu_{ls_k}) \quad (4.59)$$

$$\bar{\lambda}_{l_{-k}} = \bar{\lambda}_{l_k}^* \quad (4.60)$$

Uit het verloop van de luchtspleetlengte in tijd en ruimte gegeven door (4.56) volgt dat de componenten $(\omega_{ls_k}, \nu_{ls_k})$ van de luchtspleetpermeantie de volgende vorm aannemen:

$$(\omega_{ls_k}, \nu_{ls_k}) = (e_d \Omega, e_s + e_d) \quad (4.61)$$

Hierin zijn e_s en e_d gehele getallen die betrekking hebben op respectievelijk de statische en de dynamische excentriciteit.

Uit Figuur 4.6, waarin het luchtspleetveld $B(\theta, t)$, bepaald volgens het geïdealseerd model (4.51), het potentiaalverloop $U_{ss}(\theta, t)$ en $U_{rs}(\theta, t)$ en de permeanties $\lambda_{ss}(\theta)$, $\lambda_{rs}(\theta, t)$ en $\lambda_{ls}(\theta, t)$ zijn voorgesteld op het ogenblik $t = t_0$, volgt dat het luchtspleetveld kan worden beschreven als:

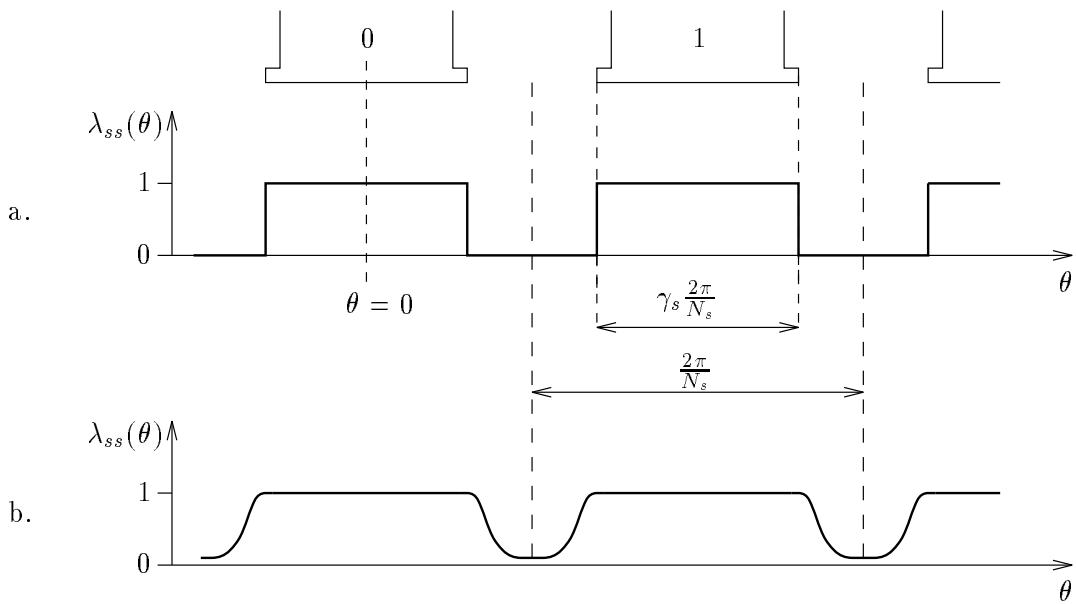
$$B(\theta, t) = \lambda_{ls}(\theta, t) \lambda_{ss}(\theta) \lambda_{rs}(\theta, t) (U_{ss}(\theta, t) - U_{rs}(\theta, t)) \quad (4.62)$$

De flux (per lengte-eenheid in de axiale richting) die de i -de statortand verlaat en de luchtspleet oversteekt bekomt men door de luchtspleetflux te integreren over de tandsteek:

$$\phi_{ls}^i(t) = R \int_{\frac{2\pi}{N_s}i - \frac{\pi}{N_s}}^{\frac{2\pi}{N_s}i + \frac{\pi}{N_s}} B(\theta, t) d\theta \quad (4.63)$$

$$= R \int_{\frac{2\pi}{N_s}i - \frac{\pi}{N_s}}^{\frac{2\pi}{N_s}i + \frac{\pi}{N_s}} \lambda_{ls}(\theta, t) \lambda_{ss}(\theta) \lambda_{rs}(\theta, t) (U_{ss}(\theta, t) - U_{rs}(\theta, t)) d\theta \quad (4.64)$$

waarbij R de straal van de luchtspleet voorstelt.



Figuur 4.7: Statorpermeantie: a. geïdealiseerd model – b. met inbegrip van fringing-effect

²De stator-, rotor-, en luchtspleetpermeanties zijn geformuleerd in overeenstemming met de algemene vorm van de reluctancies (4.23), met dien verstande dat de ruimtelijke verdeling van de permeanties beschreven wordt aan de hand van de hoekcoördinaat θ of θ_r , i.p.v. de rangnummers i van de discrete sectoren.

4.3.4.2 Stator- en rotorpermeantie met inbegrip van de fringing-flux

Het fringing-veld dat in het geïdealiseerd model verwaarloosd wordt, kan in rekening gebracht worden door het blokvormig verloop van de stator- en rotorpermeantie aan te passen, zoals voorgesteld in Figuur 4.7 voor de statorpermeantie.

Door middel van een Fourier-ontwikkeling kan de 'aangepaste' statorpermeantie algemeen als volgt worden uitgedrukt:

$$\lambda_{ss}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{s_k} e^{-jkN_s\theta} \quad (4.65)$$

waarbij de ruimtelijke ordes steeds N_s -vouden zijn.

De rotorpermeantie kan analoog in Fourier-componenten ontbonden worden:

$$\lambda_{rr}(\theta_r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{r_k} e^{-jkN_r\theta_r} \quad (4.66)$$

en wordt bijgevolg in statorcoördinaten gegeven door:

$$\lambda_{rs}(\theta, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{r_k} e^{j(kN_r\Omega t - kN_r\theta)} \quad (4.67)$$

Indien men dus het fringing-veld in rekening wil brengen, kunnen het luchtspleetveld en de tandfluxen bepaald worden aan de hand van (4.62) en (4.64), waarbij de stator- en rotorpermeantie gegeven zijn door respectievelijk (4.65) en (4.67).

4.3.4.3 Bepaling van het luchtspleetveld en de tandfluxen

Voor het berekenen van het luchtspleetveld in functie van de componenten van de stator- en rotortandpotentiaal en de daaruitvolgende tandfluxen (althans het deel van de tandflux dat de luchtspleet oversteekt) kunnen we volgens (4.62) beroep doen op superpositie, aangezien de permeanties niet afhangen van het veld. We kunnen met andere woorden het luchtspleetveld dat correspondeert met iedere component van de stator- en rotortandpotentiaal apart berekenen, waarbij we de andere componenten gelijk aan nul stellen, en de resultaten optellen.

Op deze wijze kunnen we de componenten van de stator- en rotortandflux die de luchtspleet oversteekt bepalen aan de hand van de componenten van de stator- en rotortandflux. Aangezien de berekeningsmethodes voor de statortandflux en voor de rotortandflux volledig analoog zijn, wordt hier enkel het bepalen van de statortandflux als functie van de stator- en rotortandpotentiaal besproken.

4.3.4.3.1 Bijdrage van een component van de rotortandpotentiaal tot de statortandflux

We beschouwen ten eerste een willekeurige component van de rotortandpotentiaal U_{tr} met

pulsatie ω_r , orde κ_r en complexe voorstelling \bar{U}_{tr} , en de bijhorende potentiaal van het rotoroppervlak $U_{rr}(\theta_r, t)$, zoals gedefinieerd door (4.53).

Om de statortandflux te berekenen die met deze rotorpotentiaalcomponent overeenkomt, wordt deze rotorpotentiaal achtereenvolgens vermenigvuldigd met de rotor-, de luchtspleet- en de statorpermeantie en dan geïntegreerd over een statortandsteek.

We definiëren nu de gereduceerde rotorpotentiaal U'_{rr} als het product van de rotorpotentiaal U_{rr} met de rotorpermeantie λ_{rr} :

$$U'_{rr}(\theta_r, t) = \lambda_{rr}(\theta_r) U_{rr}(\theta_r, t) \quad (4.68)$$

Het verloop van de gereduceerde rotorpotentiaal kan met behulp van een Fourier-ontwikkeling in een (theoretisch oneindige) reeks ruimtelijke componenten ontbonden worden:

$$U'_{rr}(\theta_r, t) = \Re \left(\bar{U}'_r(\theta_r) e^{j\omega_r t} \right) \quad (4.69)$$

$$= \Re \left[\left(\sum_{\nu} \bar{U}'_{r\nu} e^{-j\nu\theta_r} \right) e^{j\omega_r t} \right] \quad (4.70)$$

$$= \sum_{\nu} \Re \left(\bar{U}'_{r\nu} e^{j(\omega_r t - \nu\theta_r)} \right) \quad (4.71)$$

waarbij de complexe coëfficiënten $\bar{U}'_{r\nu}$ bepaald worden door:

$$\bar{U}'_{r\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{U}'_r(\theta_r) e^{j\nu\theta_r} d\theta_r \quad (4.72)$$

De complexe voorstelling van de gereduceerde rotorpotentiaal corresponderend met de beschouwde component \bar{U}_{tr} wordt in de i -de rotortandsteek, m.a.w. voor :

$$i\frac{2\pi}{N_r} - \frac{\pi}{N_r} \leq \theta_r \leq i\frac{2\pi}{N_r} + \frac{\pi}{N_r} \quad (4.73)$$

gegeven door

$$\bar{U}'_r(\theta_r) = \bar{U}_{tr} e^{-j\kappa_r \frac{2\pi}{N_r} i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{rk} e^{-jkN_r(\theta_r - \frac{2\pi}{N_r} i)} \quad (4.74)$$

$$= \bar{U}_{tr} e^{-j\kappa_r \frac{2\pi}{N_r} i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{rk} e^{-jkN_r\theta_r} \quad (4.75)$$

zodat de coëfficiënten $\bar{U}'_{r\nu}$ volgens (4.72) gegeven worden door:

$$\bar{U}'_{r\nu} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{N_r-1} \int_{i\frac{2\pi}{N_r} - \frac{\pi}{N_r}}^{i\frac{2\pi}{N_r} + \frac{\pi}{N_r}} \bar{U}_{tr} e^{-j\kappa_r \frac{2\pi}{N_r} i} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{rk} e^{-jkN_r\theta} \right) e^{j\nu\theta_r} d\theta_r \quad (4.76)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{N_r-1} \bar{U}_{tr} e^{-j\kappa_r \frac{2\pi}{N_r} i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{r_k} \int_{i \frac{2\pi}{N_r} - \frac{\pi}{N_r}}^{i \frac{2\pi}{N_r} + \frac{\pi}{N_r}} e^{j(\nu-kN_r)\theta_r} d\theta_r \quad (4.77)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \bar{U}_{tr} \sum_{i=0}^{N_r-1} e^{j(\nu-\kappa_r) \frac{2\pi}{N_r} i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{r_k} \frac{e^{j(\nu-kN_r) \frac{\pi}{N_r}} - e^{-j(\nu-kN_r) \frac{\pi}{N_r}}}{j(\nu-kN_r)} \quad (4.78)$$

Aangezien voor de eerste sommatie van het rechterlid van (4.78) geldt:

$$\sum_{i=0}^{N_r-1} e^{j(\nu-\kappa_r) \frac{2\pi}{N_r} i} = \begin{cases} N_r & \text{voor } \nu - \kappa_r = aN_r \\ 0 & \text{voor } \nu - \kappa_r \neq aN_r \end{cases} \quad (4.79)$$

behouden we enkel ruimtelijke ordes ν die voldoen aan:

$$\nu = \kappa_r + aN_r \quad (4.80)$$

Voor deze ordes wordt de coëfficiënt $\bar{U}'_{r\nu}$ volgens (4.78) en (4.79) gegeven door³:

$$\bar{U}'_{r\nu} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{r_k} \frac{\sin\left((\nu-kN_r) \frac{\pi}{N_r}\right)}{(\nu-kN_r) \frac{\pi}{N_r}} \bar{U}_{tr} \quad (4.81)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{r_k} \operatorname{sinc}\left((\nu-kN_r) \frac{\pi}{N_r}\right) \bar{U}_{tr} \quad (4.82)$$

$$= \Lambda_r(\nu) \bar{U}_{tr} \quad (4.83)$$

waarbij de rotorgleuffactor $\Lambda_r(\nu)$ gedefinieerd wordt als:

$$\Lambda_r(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{r_k} \operatorname{sinc}\left((\nu-kN_r) \frac{\pi}{N_r}\right) \quad (4.84)$$

Voor ordes die een veelvoud zijn van N_r ($\nu = lN_r$) komen deze gleuffactoren overeen met de corresponderende coëfficiënt λ_{r_l} van de rotorpermeantie (4.66):

$$\Lambda_r(lN_r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{r_k} \frac{\sin((l-k)\pi)}{(l-k)\pi} \quad (4.85)$$

$$= \lambda_{r_l} \quad (4.86)$$

In het geïdealiseerde model herleidt de bepaling van de coëfficiënten $\bar{U}'_{r\nu}$ zich tot:

$$\bar{U}'_{r\nu} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{N_r-1} \int_{i \frac{2\pi}{N_r} - \gamma_r \frac{\pi}{N_r}}^{i \frac{2\pi}{N_r} - \gamma_r \frac{\pi}{N_r}} \bar{U}_{tr} e^{-j\kappa_r \frac{2\pi}{N_r} i} e^{j\nu\theta_r} d\theta \quad (4.87)$$

³ $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{N_r-1} \bar{U}_{tr} e^{j(\nu-\kappa)\frac{2\pi}{N}i} 2 \frac{\sin\left(\frac{\nu\gamma_r\pi}{N_r}\right)}{\nu} \quad (4.88)$$

$$= \bar{U}_{tr} \frac{\sin\left(\frac{\nu\gamma_r\pi}{N_r}\right)}{\frac{\nu\pi}{N_r}} \quad (4.89)$$

zodat de rotorpleeffactoren in dit geval gegeven worden door:

$$\Lambda_r(\nu) = \frac{\sin\left(\frac{\nu\gamma_r\pi}{N_r}\right)}{\frac{\nu\pi}{N_r}} = \gamma_r \operatorname{sinc}\left(\frac{\nu\gamma_r\pi}{N_r}\right) \quad (4.90)$$

De gereduceerde rotorpotentiaal, veroorzaakt door de beschouwde component van de rotortandpotentiaal $\bar{U}_{tr}(\omega_r, \kappa_r)$, kan ten opzichte van de rotor volgens (4.71) en (4.83) geschreven worden als een reeks loopgolven met pulsatie ω_r en ordes $\nu = \kappa_r + aN_r$:

$$U'_{rr}(\theta_r, t) = \sum_{\nu} \Re\left(\Lambda_r(\nu)\bar{U}_{tr} e^{j(\omega_r t - \nu\theta_r)}\right) \quad (4.91)$$

Met behulp van (4.50) kunnen we de gereduceerde rotorpotentiaal uitdrukken in functie van θ , d.i. ten opzichte van de stator. In geval van schuingestelde gleuven varieert de positie van een rotorloopgolf ten opzichte van de stator in axiale richting. De axiale uitmiddeling van een rotorloopgolf zoals waargenomen door de stator leidt tot een factor $k_s(\nu)$ gegeven door:

$$k_s(\nu) = \frac{\sin\left(\frac{\nu\beta}{2}\right)}{\frac{\nu\beta}{2}} = \operatorname{sinc}\left(\frac{\nu\beta}{2}\right) \quad (4.92)$$

waarbij β de schuinstelling uitgedrukt in radialen voorstelt.

De (axiaal uitgemiddelde) gereduceerde rotorpotentiaal wordt aldus gegeven door:

$$U'_{rs}(\theta, t) = \sum_{\nu} \Re\left(\Lambda_r(\nu)k_s(\nu)\bar{U}_{tr} e^{j((\omega_r + \nu\Omega)t - \nu\theta)}\right) \quad (4.93)$$

$$= \sum_m \Re\left(\Lambda_r(\nu_m)k_s(\nu_m)\bar{U}_{tr} e^{j(\omega_m t - \nu_m\theta)}\right) \quad (4.94)$$

met

$$\nu_m = \kappa_r + mN_r \quad (4.95)$$

$$\omega_m = \omega_r + \nu_m\Omega \quad (4.96)$$

Het product van de gereduceerde rotorpotentiaal en de luchtspleetpermeantie is, op het teken na, het luchtspleetveld B' , d.i. het veld in het geval de stator niet gleufluud zou zijn.

We beschouwen nu één bepaalde loopgolf van de gereduceerde rotorpotentiaal met orde $\nu_m = \kappa_r + mN_r$, pulsatie $\omega_m = \omega_r + \nu_m\Omega$ en complexe waarde $\Lambda_r(\nu_m)k_s(\nu_m)\bar{U}_{tr}$ uit de reeks (4.94).

Door deze loopgolf te vermenigvuldigen met de luchtspleetpermeantie $\lambda_{ls}(\theta, t)$ bekomen we een reeks loopgolven van het B' -veld :

$$B'(\theta, t) = -\lambda_{ls}(\theta, t) \Re \left(\Lambda_r(\nu_m) k_s(\nu_m) \bar{U}_{tr} e^{j(\omega_m t - \nu_m \theta)} \right) \quad (4.97)$$

$$= - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Re \left(\bar{\lambda}_{l_k} \Lambda_r(\nu_m) k_s(\nu_m) \bar{U}_{tr} e^{j((\omega_m + \omega_{ls_k})t - (\nu_m + \nu_{ls_k})\theta)} \right) \quad (4.98)$$

$$= \sum_n \Re \left(\bar{B}'_n e^{j(\omega_n t - \nu_n \theta)} \right) \quad (4.99)$$

met

$$\omega_n = \omega_m + \omega_{ls_k} \quad (4.100)$$

$$\nu_n = \nu_m + \nu_{ls_k} \quad (4.101)$$

$$\bar{B}'_n = -\bar{\lambda}_{l_k} k_s(\nu_m) \Lambda_r(\nu_m) \bar{U}_{tr} \quad (4.102)$$

We beschouwen opnieuw één bepaalde loopgolf van het B' -veld met orde ν_n , pulsatie ω_n en complexe waarde \bar{B}'_n .

De corresponderende flux die de i -de statortand verlaat wordt bekomen door deze loopgolf te vermenigvuldigen met de statorpermeantie en dit product te integreren over de statortandsteek:

$$\Phi_{ls_n}^i(t) = \Re \left(\bar{\Phi}_{ls_n}^i e^{j\omega_n t} \right) \quad (4.103)$$

met

$$\bar{\Phi}_{ls_n}^i = l_a R \int_{i\frac{2\pi}{N_s} - \frac{\pi}{N_s}}^{i\frac{2\pi}{N_s} + \frac{\pi}{N_s}} \lambda_{ss}(\theta) \bar{B}'_n e^{-j\nu_n \theta} d\theta \quad (4.104)$$

$$= l_a \frac{t_s}{\frac{2\pi}{N_s}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{i\frac{2\pi}{N_s} - \frac{\pi}{N_s}}^{i\frac{2\pi}{N_s} + \frac{\pi}{N_s}} \lambda_{s_k} e^{-(\nu_n + kN_s)\theta} d\theta \bar{B}'_n \quad (4.105)$$

$$= l_a \frac{t_s}{\frac{2\pi}{N_s}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j(\nu_n + kN_s)\frac{2\pi}{N_s}i} \lambda_{s_k} \frac{\sin(\nu_n + kN_s)}{\nu_n + kN_s} \bar{B}'_n \quad (4.106)$$

$$= l_a t_s \Lambda_s(\nu_n) \bar{B}'_n e^{-j\nu_n \frac{2\pi}{N_s}i} \quad (4.107)$$

waarbij t_s de statortandsteek is en l_a de axiale lengte van de statorkern. De statorgleuffactor $\Lambda_s(\nu)$ wordt hierbij op analoge wijze gedefinieerd als de rotorpleetfactor $\Lambda_s(\nu)$ volgens (4.84) en (4.90), m.a.w.:

$$\Lambda_s(\nu) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{s_k} \operatorname{sinc} \left((\nu - kN_s) \frac{\pi}{N_s} \right) & \text{in het algemeen geval} \\ \gamma_s \operatorname{sinc} \left(\frac{\nu \gamma_s \pi}{N_s} \right) & \text{voor het geïdealiseerd model} \end{cases} \quad (4.108)$$

Uit (4.103) en (4.107) blijkt dat de beschouwde B' -loopgolf leidt tot een component van de statortandflux met dezelfde pulsatie ω_n en orde $\kappa_n = \nu_n$:

$$\Phi_{l_{s_n}}^i(t) = \Re \left(\bar{\Phi}_{l_{s_n}} e^{j(\omega_n t - \kappa_n \alpha_s i)} \right) \quad (4.109)$$

met

$$\bar{\Phi}_{l_{s_n}} = t_s l_a \Lambda_s(\nu_n) \bar{B}'_n \quad (4.110)$$

Uit (4.94), (4.102) en (4.109) volgt dat een component (ω_r, κ_r) van de rotortandpotentiaal met waarde \bar{U}_{tr} een reeks statortandfluxcomponenten (ω_n, κ_n) veroorzaakt, gegeven door:

$$(\omega_n, \kappa_n) = \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \left(\omega_r + (\kappa_r + mN_r)\Omega + \omega_{l_{s_k}}, \kappa_r + mN_r + \nu_{l_{s_k}} + aN_s \right) \quad (4.111)$$

$$\bar{\Phi}_{l_{s_n}} = \left(-t_s l_a \Lambda_s(\kappa_r + mN_r + \nu_{l_{s_k}}) k_s(\kappa_r + mN_r) \Lambda_r(\kappa_r + mN_r) \bar{\lambda}_{l_k} \bar{U}_{tr} \right)^{(*)} \quad (4.112)$$

met

$$m = -\infty, \dots, \infty \quad ; \quad k = -\infty, \dots, \infty \quad (4.113)$$

waarbij we ervoor zorgen dat de componenten (ω_n, κ_n) voldoen aan de gestelde voorwaarden (4.17)-(4.19). Om dit laatste te bereiken wordt eventueel een minteken en een term aN_s ingevoerd zoals aangeduid in (4.111). Met het eventuele minteken in (4.111) correspondeert het (*)-teken van de complexe waarde van de fluxcomponent (4.112).

4.3.4.3.2 Bijdrage van een component van de statortandpotentiaal tot de statortandflux Ten tweede beschouwen we een component van de statortandflux met pulsatie ω_s , orde κ_s en complexe waarde \bar{U}_{ts} , waarbij alle andere componenten van zowel de stator- als de rotorpotentiaal op nul worden gesteld.

Zoals hoger reeds vermeld, wordt ter hoogte van de i -de statorsector de potentiaal van het statoroppervlak gelijk gesteld aan de statortandpotentiaal:

$$U_{ss}(\theta, t) = \Re \left(\bar{U}_{ts} e^{j(\omega_s t - \kappa_s \alpha_s i)} \right) \quad (4.114)$$

voor

$$\frac{2\pi}{N_s} i - \frac{\pi}{N_s} < \theta < \frac{2\pi}{N_s} i + \frac{\pi}{N_s} \quad (4.115)$$

Het product van de luchtspleet- en de rotorpermeantie in functie van θ wordt volgens (4.58) en (4.67) gegeven door:

$$\lambda_{r_s}(\theta, t) \lambda_{l_s}(\theta, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Re \left(\lambda_{r_m} \bar{\lambda}_{l_k} e^{j((\omega_{l_{s_k}} + mN_r)\Omega)t - (\nu_{l_{s_k}} + mN_r)\theta} \right) \quad (4.116)$$

Het B' -veld ter hoogte van de i -de statorsector wordt bekomen door de statorpotential te vermenigvuldigen met deze permeantiegolven (4.116):

$$\bar{B}'(\theta, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Re \left(k_s(mN_r) \lambda_{r_m} \bar{\lambda}_{l_k} \bar{U}_{ts} e^{-j\kappa_s \alpha_s i} e^{j((\omega_{l_{s_k}} + mN_r \Omega)t - (\nu_{l_{s_k}} + mN_r)\theta)} \right) \quad (4.117)$$

waarbij de factor $k_s(mN_r)$ te wijten is aan de axiale variatie van de rotorpermeantie (vanuit het oogpunt van de stator) bij schuingestelde gleuven.

Door integratie over een tandsteek van dit B' -veld vermenigvuldigd met de statorpermeantie $\lambda_{ss}(\theta)$ (4.65), bekomen we volgens (4.107), (4.117), en (4.86) de volgende reeks componenten van de statortandflux veroorzaakt door een component (ω_s, κ_s) met waarde \bar{U}_{ts} van de statortandpotential:

$$\bar{\Phi}_{l_s}^i(t) = \sum_n \Re(\bar{\Phi}_{l_{s_n}} e^{j\omega_n t + \kappa_n \alpha_s t}) \quad (4.118)$$

met

$$(\omega_n, \kappa_n) = \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \left(\omega_s + mN_r \Omega + \omega_{l_{s_k}}, \kappa_s + mN_r + \nu_{l_{s_k}} + aN_s \right) \quad (4.119)$$

$$\bar{\Phi}_{l_{s_n}} = \left(t_s l_a \Lambda_s(mN_r + \nu_{l_{s_k}}) k_s(mN_r) \Lambda_r(mN_r) \bar{\lambda}_{l_k} \bar{U}_{ts} \right)^{(*)} \quad (4.120)$$

en

$$m = -\infty, \dots, \infty \quad ; \quad k = -\infty, \dots, \infty \quad (4.121)$$

waarbij de componenten (ω_n, κ_n) voldoen aan de gestelde voorwaarden (4.17)-(4.19).

4.3.4.3.3 Besluit In de vorige paragrafen §4.3.4.3.1 en §4.3.4.3.2 werd aangetoond hoe de componenten van Φ_{l_s} , d.i. het deel van statortandflux dat de luchtspleet oversteekt, corresponderend met een bepaalde component van respectievelijk de rotor- en statortandpotential kunnen bepaald worden .

Indien we nu alle componenten van de stator- en rotortandpotential beschouwen kunnen we de componenten van Φ_{l_s} als volgt uitdrukken:

$$\bar{\Phi}_{l_{s_m}} = \sum_{k=1}^{N_{\phi_s}} \bar{\mathcal{G}}_{l_{s_s m k}} \cdot \bar{U}_{ts_k} + \sum_{l=1}^{N_{\phi_r}} \bar{\mathcal{G}}_{l_{s_r m l}} \cdot \bar{U}_{tr_l} \quad ; \quad m = 1, \dots, N_{\phi_s} \quad (4.122)$$

waarbij de tensoren $\bar{\mathcal{G}}_{l_{s_s m k}}$ en $\bar{\mathcal{G}}_{l_{s_r m l}}$ opgesteld worden aan de hand van respectievelijk (4.119)-(4.120) en (4.111)-(4.112).

Analoog kunnen ook de componenten van Φ_{l_r} , het deel van de rotortandflux die de luchtspleet oversteekt, bepaald worden in functie van de componenten van de stator- en rotortandpotential:

$$\bar{\Phi}_{l_{r_m}} = \sum_{k=1}^{N_{\phi_s}} \bar{\mathcal{G}}_{l_{r_s m k}} \cdot \bar{U}_{ts_k} + \sum_{l=1}^{N_{\phi_r}} \bar{\mathcal{G}}_{l_{r_r m l}} \cdot \bar{U}_{tr_l} \quad ; \quad m = 1, \dots, N_{\phi_r} \quad (4.123)$$

4.3.5 M.m.k.-bronnen

De stromen in de statorwikkeling en rotorkooi worden in het magnetisch netwerkmodel weergegeven door de m.m.k.-bronnen \mathcal{F} . De plaats in het magnetisch netwerk van de m.m.k.-bronnen en het potentiaalverschil erover worden zo bepaald dat de som van de potentiaalverschillen over de m.m.k.-bronnen voor een willekeurige gesloten lus gelijk is aan de totale stroom die de kring omsluit, waarbij het verband tussen de positieve zin van de stroom en de positieve circulatiezin van de lus bepaald wordt door de zgn. kurkentrekkerregel. Indien men enkel de flux in de magnetische kern van de machine beschouwt zijn er twee voor de hand liggende keuzes voor de plaats van de m.m.k.-bronnen:

1. Men kan ten eerste in iedere stator- en rotorsector een m.m.k.-bron in serie met de jukreluctantie plaatsen. Het potentiaalverschil over de m.m.k.-bron is dan gelijk aan de stroom in de gleuf van de betreffende sector. Aangezien de som van de stromen in de statorgleuven en de som van de stromen in de rotorstaven steeds nul zijn, zijn de gemiddelde waarden van de stator- en van de rotor-m.m.k.-bronnen steeds nul zodat er geen stator- en rotor-m.m.k.-componenten van nulde orde optreden.
2. De tweede mogelijkheid bestaat erin een m.m.k.-bron te plaatsen in serie met iedere tandreluctantie. Het verschil van het potentiaalverschil over de m.m.k.-bronnen in twee naburige tanden moet dan gelijk zijn aan de stroom in de tussenliggende gleuf. Om dit te bereiken kunnen we het potentiaalverschil over de m.m.k.-bron in elke statorsector gelijkstellen aan de stroom door de spoelkoppen ter hoogte van de betreffende statortand. Analoog wordt dan de m.m.k.-bron van elke rotorsector gelijkgesteld aan de stroom in de eindring ter hoogte van de betreffende rotortand. De m.m.k.-bronnen zijn echter slechts op een constante term (in de ruimte) na bepaald. In het frequentie-orde-domein betekent dit dat de m.m.k.-componenten van nulde orde willekeurig zijn.

Indien men naast de flux in de kern eveneens de asflux in rekening brengt, is van bovenstaande mogelijkheden enkel de tweede geschikt. Het fluxpad van de asflux verloopt via de statortanden, het statorhuis, de lagers, de as, de rotortanden en via de luchtspleet terug naar de stator. De m.m.k. in dit fluxpad, m.a.w. de omsloten stroom, is gelijk aan de stroom in de spoelkoppen van de statorwikkeling en de eindring van de rotorkooi. Indien we zowel de flux in de kern van de machine als de asflux beschouwen kan de m.m.k. in een willekeurig fluxpad bijgevolg weergegeven worden door middel van m.m.k.-bronnen in de stator- en rotortanden waarvan het potentiaalverschil gelijk is aan respectievelijk de stroom in de spoelkoppen en in de eindring. Deze m.m.k.-bronnen zijn dus éénduidig bepaald, en niet meer op een constante term na, zoals in het geval waarbij enkel de flux in de kern wordt beschouwd.

Het bepalen van de m.m.k.-bronnen wordt uiteengezet bij de beschrijving van het elektrisch netwerk in §4.4.

4.3.6 Magnetische netwerkvergelijkingen

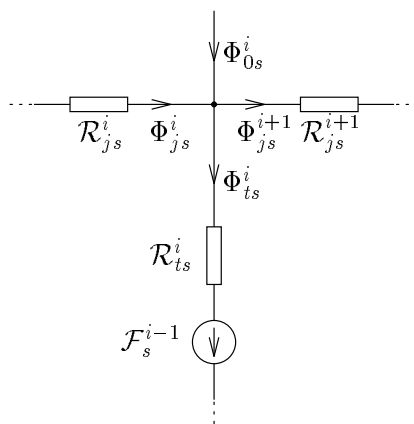
4.3.6.1 Basisvergelijkingen

In deze paragraaf worden de basisvergelijkingen opgesteld die ons toelaten de verschillende fluxcomponenten te berekenen bij gekende potentiaalverschillen over de m.m.k.-bronnen. De netwerkvergelijkingen worden hierbij uitgedrukt in de componenten van de fluxen en van de potentialen

en potentiaalverschillen. In de volgende paragraaf wordt aangetoond hoe de potentialen en de potentiaalverschillen alsook de luchtspleetflux en de jukfluxcomponenten met ordes verschillend van nul uit de netwerkvergelijkingen kunnen geëlimineerd worden. We bekommen aldus een stelsel vergelijkingen met enkel de tandfluxcomponenten en de jukfluxcomponenten van nulde orde als onbekenden.

De netwerkvergelijkingen bestaan enerzijds uit connectievergelijkingen die de topologie van het magnetisch netwerk weergeven en anderzijds uit flux-potentiaal-vergelijkingen die de netwerkelementen beschrijven.

4.3.6.1.1 Connectievergelijkingen Voor het opstellen van de connectievergelijkingen maken we de volgende veronderstelling wat betreft de relatie tussen de tand- en de jukfluxen voor zowel stator als rotor. We maken een onderscheid tussen de componenten van de tandflux met orde nul en de componenten met ordes verschillend van nul. Tandfluxcomponenten met ordes gelijk aan nul hebben als gevolg dat de som van alle tandfluxen verschilt van nul. Het fluxpad van deze netto tandflux, verloopt van de statortanden, via het statorhuis, de lagers, de as en via de luchtspleet terug naar de statortanden en kan zich dus niet binnen de kern van de machine sluiten. Deze zgn. asflux komt vooral voor bij tweepolige machines met excentrische rotor. Het fluxpad van tandfluxcomponenten met ordes verschillend van nul daarentegen kan wel volledig binnen de kern van de machine verlopen, en we veronderstellen nu dat dit ook daadwerkelijk gebeurt. We veronderstellen dus dat ter hoogte van de aansluiting van de tanden met het juk, de tandfluxcomponenten met ordes verschillend van nul volledig verder vloeien in het juk en de kern dus niet verlaten. Dit komt neer op de veronderstelling dat de reluctantie van de juksectoren te verwaarlozen is t.o.v. de reluctantie van eender welke sluitweg buiten het juk om.



Figuur 4.8: Fluxvergelijking

Indien we rekening houden met de flux die de machinekern verlaat, wordt de fluxvergelijking ter hoogte van de aansluiting van de statortanden met het statorjuk gegeven door (zie Figuur 4.8):

$$\Phi_{ts}^i(t) = \Phi_{js}^i(t) - \Phi_{js}^{i+1}(t) + \Phi_{0s}^i(t) \quad ; \quad i = 0, \dots, N_s - 1 \quad (4.124)$$

waarbij Φ_{0s}^i de flux is die de statorkern van buitenaf binnendringt ter hoogte van de i -de statorsector.

We splitsen de statortandflux Φ_{ts} op in de flux $\Phi_{ts}^{i'}$ gevormd door de componenten waarvan de ordes verschillend zijn van nul en de flux $\Phi_{ts}^{i''}$ die de fluxcomponenten met orde nul bevat:

$$\Phi_{ts}^i(t) = \Phi_{ts}^{i'}(t) + \Phi_{ts}^{i''}(t) \quad (4.125)$$

Indien we enkel de statortandfluxcomponenten met ordes verschillend van nul $\Phi_{ts}^{i'}$ beschouwen, verkrijgen we volgens de gemaakte veronderstelling, nl. dat deze flux de kern niet verlaat, het volgend verband tussen de tand- en de jukflux in de stator:

$$\Phi_{ts}^{i'}(t) = \Phi_{js}^{i'}(t) - \Phi_{js}^{i'+1}(t) \quad ; \quad i = 0, \dots, N_s - 1 \quad (4.126)$$

Uit de vergelijkingen (4.124), (4.125) en (4.126) volgt dat de flux die de statorkern ter hoogte van een statorsector binnenstroomt gelijk is aan de nulde-orde statortandflux en dus voor iedere statorsector gelijk is:

$$\Phi_{0s}^i(t) = \Phi_{ts}^{i''}(t) \quad ; \quad i = 0, \dots, N_s - 1 \quad (4.127)$$

Na een analoge redenering voor de rotorflux kunnen we besluiten dat de veronderstelling dat het fluxpad van de tandfluxcomponenten met ordes verschillend van nul zich sluit via het juk impliceert dat de flux die buiten de kern van de machine vloeit gelijkmatig over de statorsectoren en over de rotorsectoren verdeeld is, m.a.w. enkel componenten van nulde orde bevat en dus overeenkomt met een netto-flux die de stator of rotor binnenstroomt of verlaat. Aangezien er geen netto flux de machine verlaat ($\nabla \cdot \bar{B} = 0$) betekent dit dat, wat de flux buiten de kern betreft, we enkel de asflux beschouwen die van het rotorjuk via de as, de lagers en het statorhuis naar het statorjuk vloeit. Deze asflux kan in functie van de tandfluxcomponenten van nulde orde geschreven worden als:

$$\Phi_{as}(t) = N_s \Phi_{ts}^{i''}(t) \quad (4.128)$$

$$= N_r \Phi_{tr}^{i''}(t) \quad (4.129)$$

De tandfluxcomponenten van nulde orde van stator en rotor zijn dus rechtstreeks met elkaar gekoppeld. Het aantal fluxcomponenten van nulde orde en hun frequenties zijn bijgevolg gelijk voor stator en rotor. Het aantal fluxcomponenten met ordes gelijk aan nul wordt verder aangeduid met $N_{\phi 0}$.

Het verband tussen de tandflux en de jukflux (4.126) dat geldt op ieder ogenblik en voor ieder statorsector, leidt tot het volgend verband tussen de tand- en jukflux voor iedere statorfluxcomponent k afzonderlijk met $\kappa_{\phi s_k} \neq 0$:

$$e^{-j\kappa_{\phi s_k} \alpha_s i} \bar{\Phi}_{ts_k} = \left(e^{-j\kappa_{\phi s_k} \alpha_s i} - e^{-j\kappa_{\phi s_k} \alpha_s (i+1)} \right) \bar{\Phi}_{js_k} \quad (4.130)$$

$$= e^{-j\kappa_{\phi s_k} \alpha_s i} \left(1 - e^{-j\kappa_{\phi s_k} \alpha_s} \right) \bar{\Phi}_{ts_k} \quad (4.131)$$

$$\Rightarrow \bar{\Phi}_{js_k} = \frac{1}{1 - e^{-j\kappa_{\phi s_k} \alpha_s}} \bar{\Phi}_{ts_k} \quad (4.132)$$

$$= \frac{e^{j\frac{\kappa_{\phi s_k} \alpha_s}{2}}}{2j \sin\left(\frac{\kappa_{\phi s_k} \alpha_s}{2}\right)} \bar{\Phi}_{ts_k} \quad (4.133)$$

$$= \bar{\zeta}_s(\kappa_{\phi s_k}) \bar{\Phi}_{ts_k} \quad (\kappa_{\phi s_k} \neq 0) \quad (4.134)$$

waarbij de complexe functie $\bar{\zeta}_s(\kappa)$ gedefinieerd is als:

$$\bar{\zeta}_s(\kappa) = \frac{e^{j\frac{\kappa\alpha_s}{2}}}{2j \sin\left(\frac{\kappa\alpha_s}{2}\right)} \quad (4.135)$$

Analoog kan elke rotorjukfluxcomponent met orde verschillend van nul geschreven worden in functie van de corresponderende rotortandcomponent:

$$\bar{\Phi}_{js_k} = \bar{\zeta}_r(\kappa_{\phi r_k}) \bar{\Phi}_{tr_k} \quad (4.136)$$

met

$$\bar{\zeta}_r(\kappa) = \frac{e^{j\frac{\kappa\alpha_r}{2}}}{2j \sin\left(\frac{\kappa\alpha_r}{2}\right)} \quad (4.137)$$

De stator- en rotorjukfluxcomponenten met ordes verschillend van nul worden dus rechtstreeks afgeleid van de corresponderende tandfluxcomponenten van stator en rotor.

Ter hoogte van de tandtoppen wordt de tandflux opgesplitst in een deel dat de luchtspleet oversteeft en een deel dat naar de naburige tanden vloeit, de zgn. spreidingsflux. Dit laatste omvat zowel de gleufspreading als de langse luchtspleetspreiding. Voor de stator verkrijgen we het volgende verband tussen de verschillende fluxcomponenten:

$$\bar{\Phi}_{ts_k}^i = \bar{\Phi}_{ls_k}^i + \bar{\Phi}_{\sigma s_k}^i - \bar{\Phi}_{\sigma s_k}^{i+1} \quad (4.138)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{\Phi}_{ts_k} &= \bar{\Phi}_{ls_k} + \left(1 - e^{-j\kappa_{\phi s_k} \alpha_s}\right) \bar{\Phi}_{\sigma s_k} \\ &= \bar{\Phi}_{ls_k} + \frac{\bar{\Phi}_{\sigma s_k}}{\bar{\zeta}_s(\kappa_{\phi s_k})} \quad ; \quad k = 1, \dots, N_{\phi s} \end{aligned} \quad (4.139)$$

en analoog voor de rotor:

$$\bar{\Phi}_{tr_k} = \bar{\Phi}_{lr_k} + \frac{\bar{\Phi}_{\sigma r_k}}{\bar{\zeta}_r(\kappa_{\phi r_k})} \quad ; \quad k = 1, \dots, N_{\phi r} \quad (4.140)$$

De componenten van de potentiaal in het juk met ordes verschillend van nul verhouden zich tot de potentiaalverschillen in het juk als volgt:

$$\Delta \bar{U}_{js_k}^i = \bar{U}_{js_k}^{i-1} - \bar{U}_{js_k}^i \quad (4.141)$$

$$\Rightarrow \bar{U}_{js_k} = \frac{1}{e^{j\kappa_{\phi s_k} \alpha_s} - 1} \Delta \bar{U}_{js_k} \quad (4.142)$$

$$= -\bar{\zeta}_s(-\kappa_{\phi s_k}) \Delta \bar{U}_{js_k} \quad ; \quad \kappa_{\phi s_k} \neq 0 \quad (4.143)$$

en

$$\Delta \bar{U}_{jr_k}^i = \bar{U}_{jr_k}^i - \bar{U}_{jr_k}^{i-1} \quad (4.144)$$

$$\Rightarrow \bar{U}_{jr_k} = \frac{1}{1 - e^{j\kappa_{\phi r_k} \alpha_s}} \Delta \bar{U}_{jr_k} \quad (4.145)$$

$$= \bar{\zeta}_r(-\kappa_{\phi r_k}) \Delta \bar{U}_{jr_k} \quad ; \quad \kappa_{\phi r_k} \neq 0 \quad (4.146)$$

Voor componenten van de jukpotentiaal met orde nul is het potentiaalverschil over de juksegmenten uiteraard gelijk aan nul:

$$\Delta \bar{U}_{js_k} = 0 \quad ; \quad (\kappa_{\phi s_k} = 0) \quad (4.147)$$

en

$$\Delta \bar{U}_{jr_k} = 0 \quad ; \quad (\kappa_{\phi r_k} = 0) \quad (4.148)$$

Analoog kunnen we de volgende verbanden tussen de potentiaal aan de tandtoppen en de corresponderende potentiaalverschillen opstellen:

$$\Delta \bar{U}_{ts_k}^i = \bar{U}_{ts_k}^i - \bar{U}_{ts_k}^{i-1} \quad (4.149)$$

$$\Rightarrow \Delta \bar{U}_{ts_k} = \frac{\bar{U}_{ts_k}}{\bar{\zeta}_s (-\kappa_{\phi s_k})} \quad ; \quad k = 1, \dots, N_{\phi s} \quad (4.150)$$

en

$$\Delta \bar{U}_{tr_k}^i = \bar{U}_{tr_k}^{i-1} - \bar{U}_{tr_k}^i \quad (4.151)$$

$$\Rightarrow \Delta \bar{U}_{tr_k} = -\frac{\bar{U}_{tr_k}}{\bar{\zeta}_s (-\kappa_{\phi s_k})} \quad ; \quad k = 1, \dots, N_{\phi r} \quad (4.152)$$

4.3.6.1.2 Flux-potentiaal-vergelijkingen In het stator- en rotorjuk is het potentiaalverschil over de juksegmenten gelijk aan de potentiaalval over de reluctanties en wordt gegeven door:

$$\Delta U_{js_k} = \sum_{l=1}^{N_{\phi s}} \bar{\mathcal{R}}_{ts_{kl}} \bar{\Phi}_{ts_l} \quad ; \quad k = 1, \dots, N_{\phi s} \quad (4.153)$$

en

$$\Delta U_{jr_k} = \sum_{l=1}^{N_{\phi r}} \bar{\mathcal{R}}_{tr_{kl}} \bar{\Phi}_{tr_l} \quad ; \quad k = 1, \dots, N_{\phi r} \quad (4.154)$$

De reluctantietsoren $\bar{\mathcal{R}}_{ts_{kl}}$ en $\bar{\mathcal{R}}_{tr_{kl}}$ worden hierbij afgeleid van de componenten van de jukreluctantie zoals beschreven in §4.3.3.

Het potentiaalverschil over de tanden wordt bepaald door de potentiaalval over de reluctanties en door de m.m.k.-bronnen:

$$\bar{U}_{ts_k} = \bar{U}_{js_k} + \bar{\mathcal{F}}_{s_k} - \sum_{l=1}^{N_{\phi s}} \bar{\mathcal{R}}_{ts_{kl}} \bar{\Phi}_{ts_l} \quad ; \quad k = 1, \dots, N_{\phi s} \quad (4.155)$$

en

$$\bar{U}_{tr_k} = \bar{U}_{jr_k} - \bar{\mathcal{F}}_{r,k} + \sum_{l=1}^{N_{\phi r}} \bar{\mathcal{R}}_{tr_{kl}} \bar{\Phi}_{tr_l} \quad ; \quad k = 1, \dots, N_{\phi r} \quad (4.156)$$

De spreidingsflux kan als volgt in functie van het potentiaalverschil over de tandtoppen geschreven worden:

$$\bar{\Phi}_{\sigma s_k} = \sum_{l=1}^{N_{\phi s}} \bar{\mathcal{G}}_{\sigma s_{kl}} \cdot \Delta \bar{U}_{ts_l} \quad (4.157)$$

en

$$\bar{\Phi}_{\sigma r_k} = \sum_{l=1}^{N_{\phi s}} \bar{\mathcal{G}}_{\sigma r_{kl}} \cdot \Delta \bar{U}_{tr_l} \quad (4.158)$$

De permeantietensoren $\bar{\mathcal{G}}_{\sigma s_{kl}}$ en $\bar{\mathcal{G}}_{\sigma r_{kl}}$ worden op analoge wijze als de reluctantietensoren opgesteld zoals besproken in §4.3.3.

In §4.3.4 wordt aangetoond hoe de flux die de luchtspleet oversteekt kan bepaald worden in functie van de stator- en rotortandpotentiaal, wat resulteert in de uitdrukkingen (4.122) en (4.123):

$$\bar{\Phi}_{ls_k} = \sum_{l=1}^{N_{\phi s}} \bar{\mathcal{G}}_{lss_{kl}} \cdot \bar{U}_{ts_l} + \sum_{m=1}^{N_{\phi r}} \bar{\mathcal{G}}_{lsr_{km}} \cdot \bar{U}_{tr_m} \quad ; \quad k = 1, \dots, N_{\phi s} \quad (4.159)$$

en

$$\bar{\Phi}_{lr_k} = \sum_{l=1}^{N_{\phi s}} \bar{\mathcal{G}}_{lrs_{kl}} \cdot \bar{U}_{ts_l} + \sum_{m=1}^{N_{\phi r}} \bar{\mathcal{G}}_{lrr_{km}} \cdot \bar{U}_{tr_m} \quad ; \quad k = 1, \dots, N_{\phi r} \quad (4.160)$$

waarbij de tensoren $\bar{\mathcal{G}}_{lss}$, $\bar{\mathcal{G}}_{lsr}$, $\bar{\mathcal{G}}_{lrs}$ en $\bar{\mathcal{G}}_{lrr}$ bepaald worden aan de hand van de stator- en rotorpermeantie en de luchtspleetpermeantie.

Tenslotte beschouwen we de asflux. Naast de veronderstelling dat de asflux zich gelijkmatig verdeelt over de stator- en rotorsectoren, nemen we verder aan dat de reluctanties tussen de statorjuksegmenten en de as alle gelijk zijn en dat de reluctanties tussen de as en de rotorjuksegmenten alle gelijk zijn. Onder deze veronderstellingen zal een asflux een constant (in de ruimte) potentiaalverschil tussen de rotorjuksegmenten en de statorjuksegmenten veroorzaken. We kunnen bijgevolg het fluxpad tussen het stator- en het rotorjuk, gevormd door het statorhuis, de lagers en de as modelleren aan de hand van een reluctance \mathcal{R}_{as} zodat het potentiaalverschil tussen het stator- en het rotorjuk gegeven wordt door:

$$U''_{jr}(t) - U''_{js}(t) = \mathcal{R}_{as} \Phi_{as}(t) \quad (4.161)$$

waarbij de U'' de jukpotentiaal is gevormd door enkel de componenten van nulde orde (maar met verschillende frequenties).

In een magnetisch netwerk is de potentiaal in de knopen slechts op een constante na bepaald. We kiezen deze constante zo dat de gemiddelde waarde van de statorjukpotentiaal U_{js} gelijk is aan nul op ieder ogenblik. Alle componenten van de statorjukpotentiaal met orde gelijk aan nul kunnen we bijgevolg gelijk aan nul stellen:

$$\bar{U}_{js_k} = 0 \quad ; \quad \kappa_{\phi s_k} = 0 \quad (4.162)$$

zodat $U''_{js}(t)$ steeds nul is.

Uit (4.129), (4.161) en (4.162) volgt dat de componenten van nulde orde van de rotorjukupotential gegeven worden door:

$$\bar{U}_{jr_k} = \mathcal{R}_{as} N_r \bar{\Phi}_{tr_k} \quad ; \quad \kappa_{\phi r_k} = 0 \quad (4.163)$$

4.3.6.2 Opbouw van het stelsel magnetische netwerkvergelijkingen

Uitgaande van de in vorige paragraaf besproken basisvergelijkingen wordt nu een stelsel vergelijkingen opgebouwd met enkel de stator- en rotortandfluxcomponenten en de stator- en rotorjukupotentialcomponenten van nulde orde als onbekenden.

We gaan hierbij uit van de fluxvergelijkingen ter hoogte van de tandtoppen (4.139) en (4.140). Dit zijn $N_{\phi_s} + N_{\phi_r}$ vergelijkingen, nl. één vergelijking per stator- en rotortandfluxcomponent. Met behulp van de vergelijkingen (4.150), (4.152), (4.159), (4.160), (4.157) en (4.158) worden deze fluxvergelijkingen omgevormd tot:

$$\bar{\Phi}_{ts_k} = \sum_{l=1}^{N_{\phi_s}} \bar{\mathcal{G}}_{lss_{kl}} \cdot \bar{U}_{ts_l} + \sum_{l=1}^{N_{\phi_r}} \bar{\mathcal{G}}_{lsr_{kl}} \cdot \bar{U}_{tr_l} + \frac{1}{\bar{\zeta}_s(\kappa_{\phi s_k})} \sum_{l=1}^{N_{\phi_s}} \bar{\mathcal{G}}_{\sigma s_{kl}} \cdot \frac{\bar{U}_{ts_l}}{\bar{\zeta}_s(-\kappa_{\phi s_l})} \quad (4.164)$$

$k = 1, \dots, N_{\phi_s}$

$$\bar{\Phi}_{tr_k} = \sum_{l=1}^{N_{\phi_s}} \bar{\mathcal{G}}_{lrs_{kl}} \bar{U}_{ts_l} + \sum_{l=1}^{N_{\phi_r}} \bar{\mathcal{G}}_{lrr_{kl}} \bar{U}_{tr_l} + \frac{1}{\bar{\zeta}_r(\kappa_{\phi r_k})} \sum_{l=1}^{N_{\phi_r}} \bar{\mathcal{G}}_{\sigma r_{kl}} \frac{\bar{U}_{tr_l}}{\bar{\zeta}_r(-\kappa_{\phi r_l})} \quad (4.165)$$

$k = 1, \dots, N_{\phi_r}$

Verder beschouwen we de vergelijkingen (4.147) en (4.148) voor de jukupotentialcomponenten van nulde orde die aan de hand van de flux-potential-vergelijkingen (4.153) en (4.154) als volgt geformuleerd kunnen worden :

$$\Delta U_{js_k} = \sum_{l=1}^{N_{\phi_s}} \bar{\mathcal{R}}_{js_{kl}} \cdot \bar{\Phi}_{js_l} = 0 \quad ; \quad \kappa_{\phi s_k} = 0 \quad (4.166)$$

$$\Delta U_{jr_k} = \sum_{l=1}^{N_{\phi_r}} \bar{\mathcal{R}}_{jr_{kl}} \cdot \bar{\Phi}_{jr_l} = 0 \quad ; \quad \kappa_{\phi r_k} = 0 \quad (4.167)$$

Dit zijn $2N_{\phi_0}$ vergelijkingen, m.a.w. één per stator- of rotorfluxcomponent met orde nul.

Bovenstaande vergelijkingen (4.164)-(4.167), $N_{\phi_s} + N_{\phi_r} + 2N_{\phi_0}$ in aantal, kunnen nu geschreven worden in de tandfluxcomponenten van stator en rotor ($N_{\phi_s} + N_{\phi_r}$ onbekenden) en de componenten van nulde orde van de stator- en rotorjukupotential ($2N_{\phi_0}$ onbekenden). We gaan hierbij als volgt te werk.

De tandpotentialen U_{tr} en U_{ts} kunnen met behulp van (4.155) en (4.156) uitgedrukt worden in functie van de jukupotentialen, de m.m.k.-bronnen en de tandfluxen:

$$\bar{U}_{ts_k} = \bar{U}_{js_k} + \bar{\mathcal{F}}_{s_k} - \sum_{l=1}^{N_{\phi_s}} \bar{\mathcal{R}}_{ts_{kl}} \cdot \bar{\Phi}_{ts_l} \quad ; \quad k = 1, \dots, N_{\phi_s} \quad (4.168)$$

$$\bar{U}_{tr_k} = \bar{U}_{jr_k} - \bar{\mathcal{F}}_{r,k} + \sum_{l=1}^{N_{\phi r}} \bar{\mathcal{R}}_{tr_{kl}} \cdot \bar{\Phi}_{tr_l} \quad ; \quad k = 1, \dots, N_{\phi r} \quad (4.169)$$

De componenten van de jukpotentiaal met ordes verschillend van nul kunnen op basis van (4.143), (4.146), (4.153) en (4.154) geschreven worden in functie van de jukfluxen:

$$\bar{U}_{js_k} = -\bar{\zeta}_s(-\kappa_{\phi s_k}) \sum_{l=1}^{N_{\phi s}} \bar{\mathcal{R}}_{js_{kl}} \bar{\Phi}_{js_l} \quad ; \quad \kappa_{\phi s_k} \neq 0 \quad (4.170)$$

en

$$\bar{U}_{jr_k} = \bar{\zeta}_r(-\kappa_{\phi s_k}) \sum_{l=1}^{N_{\phi r}} \bar{\mathcal{R}}_{jr_{kl}} \bar{\Phi}_{jr_l} \quad ; \quad \kappa_{\phi r_k} \neq 0 \quad (4.171)$$

De componenten van nulde orde daarentegen worden gegeven door (4.162) en (4.163):

$$\bar{U}_{js_k} = 0 \quad ; \quad \kappa_{\phi s_k} = 0 \quad (4.172)$$

en

$$\bar{U}_{jr_k} = \mathcal{R}_{as} N_r \bar{\Phi}_{tr_k} \quad ; \quad \kappa_{\phi r_k} = 0 \quad (4.173)$$

Tenslotte is iedere jukfluxcomponent met orde verschillend van nul rechtstreeks afgeleid van de corresponderende tandfluxcomponent volgens (4.134) en (4.136):

$$\bar{\Phi}_{js_k} = \bar{\zeta}_s(\kappa_{\phi s_k}) \bar{\Phi}_{ts_k} \quad ; \quad \kappa_{\phi s_k} \neq 0 \quad (4.174)$$

$$\bar{\Phi}_{jr_k} = \bar{\zeta}_r(\kappa_{\phi r_k}) \bar{\Phi}_{tr_k} \quad ; \quad \kappa_{\phi r_k} \neq 0 \quad (4.175)$$

Door opeenvolgende substituties aan de hand van de vergelijkingen (4.168)-(4.175) kunnen de $(N_{\phi s} + N_{\phi r} + 2N_{\phi 0})$ vergelijkingen (4.164)-(4.167) geschreven worden in de $(N_{\phi s} + N_{\phi r} + 2N_{\phi 0})$ onbekenden, met name de tandfluxen en de jukfluxen van nulde orde van stator en rotor.

4.4 Elektrisch netwerk

Het magnetisch netwerk is gekoppeld met een elektrisch netwerk. Enerzijds worden de m.m.k.-bronnen van het magnetisch netwerk bepaald door de stator- en rotorstromen. Anderzijds worden de stator- en rotorstromen bepaald door o.a. de geïnduceerde spanning, die kan uitgedrukt worden in functie van de tandfluxen.

4.4.1 Statorwikkeling

Wat de statorwikkeling betreft, beschouwen we enkel driefasige heelgroefwikkelingen. Verder worden enkel één- en tweelaagswikkelingen met gescheiden fasezones en 60° fasebreedte in aanmerking genomen. Aangezien eenlaagswikkelingen kunnen beschouwd worden als tweelaagswikkelingen zonder spoedverkorting, zullen enkel tweelaagswikkelingen expliciet besproken worden.

Hoewel we ons beperken tot deze klasse wikkelingen kan de werkwijze die in deze paragraaf wordt uiteengezet eenvoudig worden uitgebreid naar elk type wikkeling dat herleidbaar is tot een wikkeling dat is opgebouwd uit identieke spoelen, d.i. spoelen met een gelijk aantal windingen en dezelfde spoelwijdte.

4.4.1.1 Elementaire spoelgroepen

De beschouwde driefasige tweelaagswikkelingen zijn opgebouwd uit elementaire spoelgroepen. Er is één spoelgroep per pool en per fase wat in totaal, met N_p het aantal poolparen, $6N_p$ spoelgroepen oplevert. Elke spoelgroep heeft w windingen en bestaat uit q identieke spoelen, waarbij q het aantal statorgleuven per pool en per fase is :

$$q = \frac{N_s}{6N_p} \quad (4.176)$$

De spoelgroepen worden in de statorgleuven aangebracht zoals geschetst in Figuur 4.9 waarbij één elementaire spoelgroep (nl. spoelgroep 0) in vet is aangeduid en waarbij verder enkel de spoelgroepen die aan fase U worden toegekend zijn voorgesteld. De aangeduide stroomzinnen in de spoelzijden komen overeen met een positieve stroom in de spoelgroepen.

De spoelwijdte ϕ , uitgedrukt in mechanische radialen, is bij diameterwikkelingen gelijk aan $\frac{\pi}{N_p}$, zodat we de spoedverkorting ϕ_v als volgt definiëren:

$$\phi_v = \frac{\pi}{N_p} - \phi \quad (4.177)$$

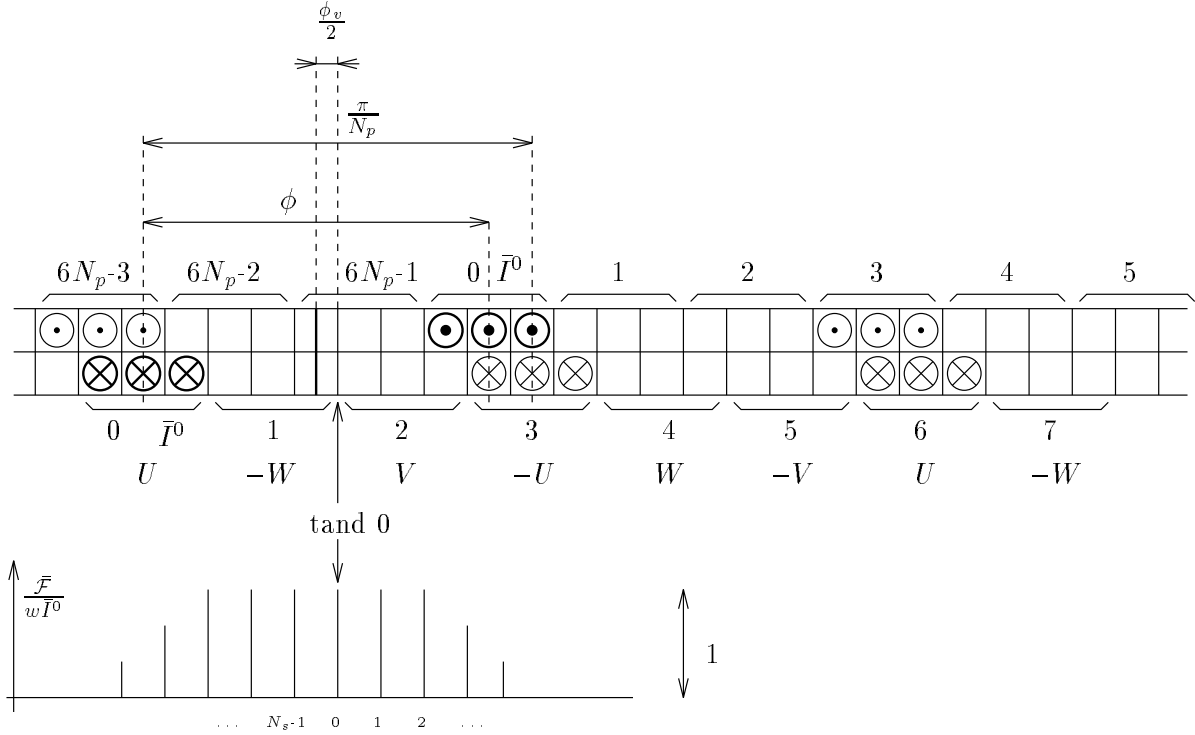
Verder kiezen we de positie van spoelgroep 0 zodanig dat de symmetrie-as van deze spoelgroep zou samenvallen met het midden van statortand 0 indien er geen spoedverkorting zou zijn. Bij spoedverkorting is de symmetrie-as van spoelgroep 0 over een hoek $\frac{\phi_v}{2}$ verschoven t.o.v. tand 0, zoals aangeduid in Figuur 4.9.

De stroom en de geïnduceerde spanning in de elementaire spoelgroepen worden net als de grootheden van het magnetisch netwerk in componenten ontbonden.

We beschouwen bijvoorbeeld een stroomcomponent met pulsatie ω_k , orde κ_k en complexe waarde \bar{I}_k . De stroom door de spoelgroepen in functie van het rangnummer i en de tijd corresponderend met deze component wordt gegeven door:

$$I_k^i(t) = \Re \left(\bar{I}_k e^{j \left(\omega_k t - \kappa_k \frac{2\pi}{6N_p} i \right)} \right) \quad (4.178)$$

$$= \Re \left(\bar{I}_k^i e^{j\omega_k t} \right) \quad (4.179)$$



Figuur 4.9: Elementaire spoelgroepen van de statorwikkeling

Het verband tussen equivalente stroomcomponenten luidt hierbij als volgt:

$$(\omega_k, \kappa_k) = \pm(\omega_l, \kappa_l + 6aN_p) \tag{4.180}$$

zodat we de volgende voorwaarden aan (ω_k, κ_k) opleggen⁴:

$$\omega_k > 0 \text{ rad/s} \tag{4.181}$$

$$0 < \kappa_k \leq 6N_p - 1 \tag{4.182}$$

4.4.1.1.1 M.m.k.-bronnen van een stroomcomponent Zoals hoger reeds vermeld (zie §4.3.5) worden de stromen in de statorwikkeling in het magnetisch netwerk weergegeven door middel van m.m.k.-bronnen in de statortanden, waarbij het potentiaalverschil over de m.m.k.-bron gelijk is aan de stroom in de spoelkoppen ter hoogte van de betreffende statortand. Om de componenten van deze m.m.k.-bronnen te bepalen beschouwen we een elementaire stroomcomponent (ω_k, κ_k) met complexe waarde \bar{I}_k .

⁴Merk op dat we hier geen gelijkstroomcomponenten ($\omega_k = 0$ rad/s) beschouwen. We veronderstellen immers dat de aangelegde spanning geen gelijkspanningscomponenten bevat. Aangezien er in de wikkelingen ook geen gelijkspanningscomponenten kunnen geïnduceerd worden, kunnen er geen gelijkstroomcomponenten vloeien.

De stroom in de elementaire spoelgroepen wordt aldus bepaald door:

$$\bar{I}_k^i = \bar{I}_k e^{-j\kappa_k \frac{2\pi}{6N_p} i} \quad (4.183)$$

De m.m.k.-bronnen van het magnetische netwerk die hiermee overeenstemmen hebben uiteraard dezelfde frequentie, terwijl de ruimtelijke verdeling over de N_s statortanden in N_s Fourier-componenten kan ontbonden worden:

$$\bar{\mathcal{F}}^i = \sum_{\kappa=0}^{N_s-1} \bar{\mathcal{F}}_\kappa e^{-j\kappa\alpha_s i} \quad (4.184)$$

waarbij de coëfficiënten $\bar{\mathcal{F}}_\kappa$ als volgt bepaald worden:

$$\bar{\mathcal{F}}_\kappa = \sum_{i=0}^{N_s-1} \bar{\mathcal{F}}^i e^{j\kappa\alpha_s i} \quad (4.185)$$

Beschouwen we eerst enkel de stroom in spoelgroep 0 met $\bar{I}_k^0 = \bar{I}_k$. De m.m.k.-verdeling, m.a.w. de stroom in de spoelkoppen, die daarmee overeenstemt is weergegeven in Figuur 4.9. Door superpositie van de Fourier-ontwikkeling van het m.m.k.-verloop van de q spoelen die over een hoek α_s ten opzichte van elkaar verschoven zijn en die samen de elementaire spoelgroep 0 vormen, bekomen we de volgende coëfficiënten $\bar{\mathcal{F}}_\kappa$:

$$\bar{\mathcal{F}}_\kappa = \frac{\sin\left(\frac{\kappa\phi}{2}\right)}{N_s \sin\left(\frac{\kappa\alpha_s}{2}\right)} e^{-j\frac{\kappa\phi_v}{2}} \frac{\sin\left(\frac{q\kappa\alpha_s}{2}\right)}{q \sin\left(\frac{\kappa\alpha_s}{2}\right)} w \bar{I}^0 \quad (4.186)$$

We kunnen hierbij twee wikkelfactoren definiëren. De eerste is de zonefactor $\xi_z(\kappa)$ die te wijten is aan het feit dat de elementaire spoelgroepen bestaan uit q spoelen over een hoek α_s ten opzichte van elkaar verschoven:

$$\xi_z(\kappa) = \frac{\sin\left(\frac{q\kappa\alpha_s}{2}\right)}{q \sin\left(\frac{\kappa\alpha_s}{2}\right)} \quad (4.187)$$

De tweede is de complexe spoedverkortingsfactor $\bar{\xi}_v(\kappa)$ die zowel een reductie van de amplitude en als een verdraaiing van de vectoriële voorstelling van de Fourier-componenten veroorzaakt ⁵:

$$\bar{\xi}_v(\kappa) = \sin\left(\frac{\kappa\phi}{2}\right) e^{-j\frac{\kappa\phi_v}{2}} \quad (4.188)$$

Met behulp van deze wikkelfactoren worden de m.m.k.-componenten $\bar{\mathcal{F}}_\kappa$ gegeven door:

$$\bar{\mathcal{F}}_\kappa = \frac{w}{N_s \sin\left(\frac{\kappa\alpha_s}{2}\right)} \bar{\xi}_v(\kappa) \xi_z(\kappa) \bar{I}_k \quad (4.189)$$

⁵De verdraaiing is een gevolg van het feit dat bij spoedverkorting de symmetrie-as van spoelgroep 0 over een hoek $\frac{\phi_v}{2}$ verschoven is t.o.v. statortand 0.

Aangezien de spoelgroepen in de ruimte over $\frac{2\pi}{6N_p}$ ten opzichte van elkaar verschoven zijn en de stromen die ze voeren over $\kappa_k \frac{2\pi}{6N_p}$ in de tijd verschoven zijn, worden de componenten van de m.m.k.-bronnen corresponderend met de stroom in alle spoelgroepen als volgt bepaald:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{F}}_\kappa &= \sum_{i=0}^{6N_p-1} \frac{w}{N_s \sin\left(\frac{\kappa\alpha_s}{2}\right)} \bar{\xi}_v(\kappa) \xi_z(\kappa) e^{j\kappa \frac{\pi}{3N_p} i} \bar{I}_k e^{-j\kappa_k \frac{\pi}{3N_p} i} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{6N_p-1} e^{j(\kappa-\kappa_k) \frac{2\pi}{6N_p} i} \right) \frac{w}{N_s \sin\left(\frac{\kappa\alpha_s}{2}\right)} \bar{\xi}_v(\kappa) \xi_z(\kappa) \bar{I}_k\end{aligned}\quad (4.190)$$

waarbij

$$\sum_{i=0}^{6N_p-1} e^{j(\kappa-\kappa_k) \frac{2\pi}{6N_p} i} = \begin{cases} 6N_p & \text{voor } \kappa - \kappa_k = 6aN_p \\ 0 & \text{voor } \kappa - \kappa_k \neq 6aN_p \end{cases}\quad (4.191)$$

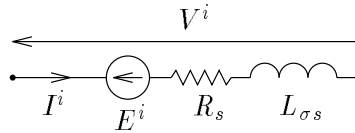
Hieruit volgt dat de componenten van de m.m.k.-bronnen die overeenkomen met een elementaire stroomcomponent \bar{I}_k met orde κ_k gegeven worden door :

$$\bar{\mathcal{F}}_n = \frac{6N_p w}{N_s \sin\left(\frac{\kappa_n \alpha_s}{2}\right)} \bar{\xi}_v(\kappa_n) \xi_z(\kappa_n) \bar{I}_k\quad (4.192)$$

met

$$\kappa_n = \kappa_k + 6nN_p \quad ; \quad n = 0, \dots, q-1\quad (4.193)$$

Van de N_s Fourier-componenten van de m.m.k. van een elementaire stroomcomponent (met ordes $\kappa = 0, \dots, N_s - 1$) zijn er slechts q verschillend van nul.



Figuur 4.10: Elektrisch schema van een elementaire spoelgroep

4.4.1.1.2 Geïnduceerde spanning in elementaire spoelgroepen In Figuur 4.10 wordt het elektrische schema van een elementaire spoelgroep voorgesteld. De referentiezijn van de spanningsval wordt gekozen in functie van de positieve stroomzin volgens het V.R.S.. De weerstand R_s is hierbij de elektrische weerstand van één elementaire spoelgroep terwijl L_{σ_s} de spreidingszelfinductantie is die overeenkomt met de spreidingsflux die niet vervat is in het magnetisch netwerkmodel. L_{σ_s} is dus de spoelkopspreidingsinductantie. E_s is de spanning geïnduceerd in de elementaire spoelgroep door de statortandfluxen.

Voor het bepalen van de geïnduceerde spanning in de elementaire spoelgroepen beschouwen we een component (ω, κ) van de statortandflux Φ_{ts} met complexe waarde $\bar{\Phi}_{ts}$ en waarbij:

$$\omega > 0 \text{ rad/s}\quad (4.194)$$

$$0 \leq \kappa \leq N_s - 1\quad (4.195)$$

De flux in de i -de statortand wordt bijgevolg gegeven door:

$$\bar{\Phi}_{ts}^i = \bar{\Phi}_{ts} e^{-j\kappa\alpha_s i} \quad (4.196)$$

De flux gekoppeld met een spoel (met $\frac{w}{q}$ windingen) wordt bekomen door de sommatie van de tandflux in de tanden $l = l_1, \dots, l_2$ die de spoel omsluit:

$$\bar{\Psi}_{spoel} = \frac{w}{q} \sum_{l=l_1}^{l_2} \bar{\Phi}_{ts} e^{-j\kappa\alpha_s l} \quad (4.197)$$

$$= \frac{w}{q \sin\left(\frac{\kappa\alpha_s}{2}\right)} \xi_z(\kappa) \bar{\xi}_v^*(\kappa) e^{-j\kappa\alpha_s \left(\frac{l_1+l_2}{2}\right)} \bar{\Phi}_{ts} \quad (4.198)$$

zodat de flux gekoppeld met spoelgroep i , bestaande uit q spoelen, gegeven wordt door:

$$\bar{\Psi}^i = \frac{w}{\sin\left(\frac{\kappa\alpha_s}{2}\right)} \xi_z(\kappa) \bar{\xi}_v^*(\kappa) e^{-j\kappa \frac{2\pi}{6N_p} i} \bar{\Phi}_{ts} \quad (4.199)$$

De beschouwde statorfluxcomponent $\bar{\Phi}_{ts}(\omega, \kappa)$ veroorzaakt dus een component van de gekoppelde flux bepaald door:

$$\omega_k = \omega \quad (4.200)$$

$$\kappa_k = \kappa - 6aN_p \quad \text{zodat } 0 \leq \kappa_k \leq 6N_p - 1 \quad (4.201)$$

$$\bar{\Psi}_k = \frac{w}{\sin\left(\frac{\kappa\alpha_s}{2}\right)} \xi_z(\kappa) \bar{\xi}_v^*(\kappa) \bar{\Phi}_{ts} \quad (4.202)$$

en bijgevolg een geïnduceerde spanning:

$$\bar{E}_k = j\omega_k \bar{\Psi}_k \quad (4.203)$$

$$= j\omega_k \frac{w}{\sin\left(\frac{\kappa\alpha_s}{2}\right)} \xi_z(\kappa) \bar{\xi}_v^*(\kappa) \bar{\Phi}_{ts} \quad (4.204)$$

4.4.1.2 Spanningsvergelijkingen en m.m.k.-bronnen van de statorwikkeling

Uit de $6N_p$ elementaire spoelgroepen wordt nu een symmetrische driefasige wikkeling opgebouwd. Hierbij worden de spoelgroepen aan de drie fasen U , V en W toegekend zoals aangeduid in Figuur 4.9. Iedere fase $k=0,1,2$, corresponderend met de fasen U , V en W , krijgt de spoelgroepen

$$2k + 3a \quad ; \quad a = 0, \dots, 2N_p - 1 \quad (4.205)$$

toegewezen.

Per poolpaar en per fase worden telkens twee opeenvolgende spoelgroepen, die over π elektrische radialen verschoven zijn, in serie geschakeld, maar in tegengestelde zin. De stroom in de oneven spoelgroep $2n + 3$ is bijgevolg in principe tegengesteld aan de stroom in even spoelgroep $2n$. Deze serieschakeling van telkens een even en een oneven spoelgroep wordt verder aangeduid met het begrip 'spoelgroepaar'.

Per fase kunnen de N_p spoelgroepenparen ofwel in serie ofwel in parallel geschakeld worden. Bij een parallelschakeling kunnen bovendien per fase de even en de oneven spoelgroepen in parallel geschakeld worden door middel van zgn. equipotentiaalverbindingen. In dit geval zijn de stromen in de even en de oneven spoelgroepen niet meer noodzakelijk elkaars tegengestelde. Dit wordt verder verduidelijkt.

Hoewel er nog andere mogelijkheden van serie- en parallelschakelingen zijn, worden hier enkel drie gevallen behandeld, met name :

1. parallelschakeling van de spoelgroepenparen van elke fase met het aanbrengen van equipotentiaalverbindingen
2. parallelschakeling van de spoelgroepenparen van elke fase zonder equipotentiaalverbindingen
3. serieschakeling van de spoelgroepenparen van elke fase

Voor elke van deze drie gevallen wordt besproken hoe de stroomverdeling in de statorwikkeling kan worden beschreven. In geval 3 volstaan bijvoorbeeld de stromen in de drie fasen terwijl in geval 1 de stromen in de $6N_p$ elementaire spoelgroepen nodig zijn om de stroomverdeling volledig te bepalen.

Verder worden voor ieder geval de m.m.k.-bronnen bepaald die met een bepaalde stroomcomponent geassocieerd zijn, worden de geïnduceerde spanningen in functie van de statortandfluxen bepaald, en wordt tenslotte een stelsel spanningsvergelijkingen opgesteld. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de resultaten van §4.4.1.1 voor de m.m.k. en de geïnduceerde spanning van elementaire spoelgroepen.

Wat de fasewikkelingen in hun geheel betreft, deze kunnen in ster of in driehoek geschakeld zijn. Bij een stersschakeling kan het sterpunt al dan niet verbonden zijn met de neutrale, wat we verder zullen aanduiden met 'verbonden ster' of 'niet-verbonden ster'. De spanning over de fasewikkelingen wordt als volgt in componenten ontbonden:

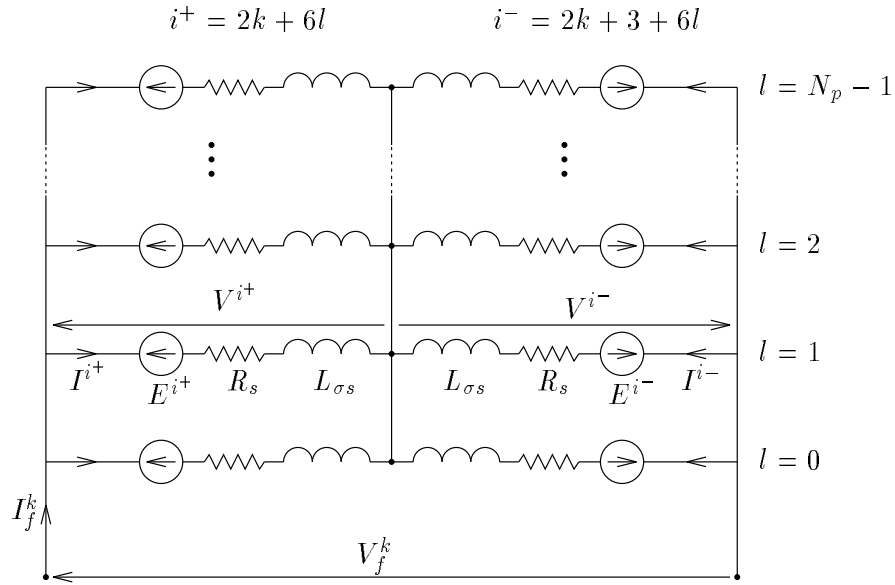
$$V_f^k(t) = \sum_l \Re \left(\bar{V}_{f_l} e^{\omega_{v_l} t - \kappa_{v_l} \frac{2\pi}{3} k} \right) \quad ; \quad k = 0, 1, 2 \quad (4.206)$$

met

$$\omega_{v_l} > 0 \text{ rad/s} \quad (4.207)$$

$$\kappa_{v_l} = 0, 1, 2 \quad (4.208)$$

Bij een driehoekschakeling wordt de spanning over iedere fasewikkeling opgedrongen, waarbij de homopolaire spanning \bar{V}_{f_l} met $\kappa_{v_l} = 0$ steeds nul is. Bij verbonden ster wordt eveneens de spanning over iedere fase opgedrongen, waarbij eventueel wel een homopolaire spanning kan aanwezig zijn. Bij een niet-verbonden stersschakeling wordt de homopolaire fasespanning niet opgedrongen. Enkel de directe en de inverse spanningscomponenten worden dus opgedrongen, terwijl er geen homopolaire fasestroom kan vloeien.



Figuur 4.11: Elektrisch netwerk van de statorwikkeling bij parallelschakeling van de spoelgroepen met equipotentiaalverbindingen

4.4.1.2.1 Parallelschakeling met equipotentiaalverbindingen De opbouw van fasewikkeling k ($k = 0, 1, 2$) uit elementaire spoelgroepen wordt voorgesteld in Figuur 4.11.

Iedere even spoelgroep toegewezen aan de fase k , gegeven door

$$i^+ = 2k + 6l; l = 0, \dots, N_p - 1 \quad (4.209)$$

wordt in serie geschakeld, maar in tegengestelde zin, met de corresponderende oneven spoelgroep gegeven door:

$$i^- = 2k + 3 + 6l; l = 0, \dots, N_p - 1 \quad (4.210)$$

zodat per fase N_p spoelgroepen worden gevormd ($l = 0, \dots, N_p - 1$).

Bovendien worden de middelpunten van de spoelgroepen met elkaar verbonden door middel van equipotentiaalverbindingen, zodat niet alleen de spoelgroepen, maar ook de even en de oneven spoelgroepen afzonderlijk in parallel staan.

De variabelen van het elektrisch netwerk zijn in deze schakeling de stromen en de geïnduceerde spanningen in de afzonderlijke spoelgroepen. Net als voor het magnetisch netwerk wordt een lijst opgesteld met de componenten van deze grootheden die in aanmerking worden genomen voor de numerieke modellering van de machine. De stromen en de spanningen worden aldus als volgt geformuleerd:

$$I_s^i(t) = \sum_{k=1}^{N_{is}} \Re \left(\bar{I}_{s_k} e^{j \left(\omega_{is_k} t - \kappa_{is_k} \frac{2\pi}{6N_p} i \right)} \right) \quad (4.211)$$

$$E_s^i(t) = \sum_{k=1}^{N_{is}} \Re \left(\bar{E}_{s_k} e^{j \left(\omega_{is_k} t - \kappa_{is_k} \frac{2\pi}{3N_p} i \right)} \right) \quad (4.212)$$

waarbij de componenten $(\omega_{is_k}, \kappa_{is_k})$ voldoen aan de voorwaarden:

$$\omega_{is_k} > 0 \text{ rad/s} \quad (4.213)$$

$$0 < \kappa_{is_k} \leq 6N_p - 1 \quad (4.214)$$

De componenten van de m.m.k.-bronnen geassocieerd met een stroomcomponent k worden volgens (4.192) gegeven door:

$$\bar{\mathcal{F}}_{s_l} = \frac{6N_p w}{N_s \sin \left(\frac{\kappa_{\phi s_l} \alpha_s}{2} \right)} \bar{\xi}_v(\kappa_{\phi s_l}) \xi_z(\kappa_{\phi s_l}) \bar{I}_{s_k} \quad (4.215)$$

waarbij het verband tussen de componenten l van het magnetisch netwerk en de componenten k van het elektrisch netwerk als volgt luidt:

$$\omega_{\phi s_l} = \omega_{is_k} \quad (4.216)$$

$$\kappa_{\phi s_l} = \kappa_{is_k} + 6aN_p \quad ; \quad a = 0, \dots, q-1 \quad (4.217)$$

Elke component van de m.m.k.-bronnen is bepaald door slechts één stroomcomponent. De m.m.k.-bronnen geassocieerd met twee verschillende stroomcomponenten hebben immers geen gemeenschappelijke elementen. Omgekeerd wordt elke stroomcomponent in het magnetisch netwerk voorgesteld door q m.m.k.-componenten.

Analoog wordt een component k van de geïnduceerde spanning bepaald door q componenten van de statortandflux. Volgens (4.204) worden deze spanningen geïnduceerd in de spoelgroepen gegeven door:

$$\bar{E}_{s_k} = j\omega_{is_k} \sum_l \frac{w}{\sin \left(\frac{\kappa_{\phi s_l} \alpha_s}{2} \right)} \bar{\xi}_v^*(\kappa_{\phi s_l}) \xi_z(\kappa_{\phi s_l}) \bar{\Phi}_{ts_l} \quad (4.218)$$

met

$$\omega_{\phi s_l} = \omega_{is_k} \quad (4.219)$$

$$\kappa_{\phi s_l} = \kappa_{is_k} + 6aN_p \quad ; \quad a = 0, \dots, q-1 \quad (\kappa_{\phi s_l} \text{ modulo } 6N_p = \kappa_{is_k}) \quad (4.220)$$

Op basis van de topologie van het elektrisch netwerk kunnen een reeks spanningsvergelijkingen worden opgesteld. Dankzij de lineariteit van de netwerkelmenten R_s en $L_{\sigma s}$ kunnen de elektrische vergelijkingen voor de verschillende componenten ontkoppeld worden. De elektrische netwerkvergelijkingen, die worden afgeleid in Appendix F, kunnen als volgt worden samengevat:

- Voor alle stroomcomponenten met ordes die geen veelvoud van N_p zijn geldt de volgende vergelijking:

$$\bar{E}_{s_k} + (R_s + j\omega_{is_k} L_{\sigma s}) \bar{I}_{s_k} = 0 \quad \text{voor} \quad \kappa_{is_k} \neq aN_p \quad (4.221)$$

- Voor componenten met ordes die een oneven veelvoud van N_p zijn, m.a.w. voor

$$\kappa_{is_k} = aN_p \quad ; \quad a = 1, 3, \text{ of } 5 \quad (4.222)$$

is de spanning over de spoelgroepen gelijk aan de aangelegde fasespanning:

$$2 [\bar{E}_{s_k} + (R_s + j\omega_{is_k} L_{\sigma s}) \bar{I}_{s_k}] = \bar{V}_{fl} \quad (4.223)$$

met

$$\omega_{is_k} = \omega_{v,l} \quad (4.224)$$

$$\frac{\kappa_{is_k}}{N_p} \text{ modulo } 3 = \kappa_{v,l} \quad (4.225)$$

Bij niet-verbonden sterschakeling vallen de spanningsvergelijkingen voor $\kappa_{is_k} = 3N_p$, m.a.w. voor de homopolaire spanningscomponenten, weg. Deze vergelijkingen worden gecompenseerd door de vereiste dat er geen homopolaire fasestromen vloeien zodat bij het opstellen van de lijst van de stroomcomponenten de ordes $\kappa_{is_k} = 3N_p$ kunnen worden weggelaten.

- Stroomcomponenten met ordes die een even veelvoud zijn van N_p kunnen niet voorkomen omdat de som van de stromen van de even spoelzijden en die van de oneven spoelzijden in dit geval niet elkaars tegengestelde zijn. Bij het opstellen van de lijst van stroomcomponenten mogen de ordes

$$\kappa_{is_k} = aN_p \quad ; \quad a = 0, 2, \text{ en } 4 \quad (4.226)$$

a priori uitgesloten worden.

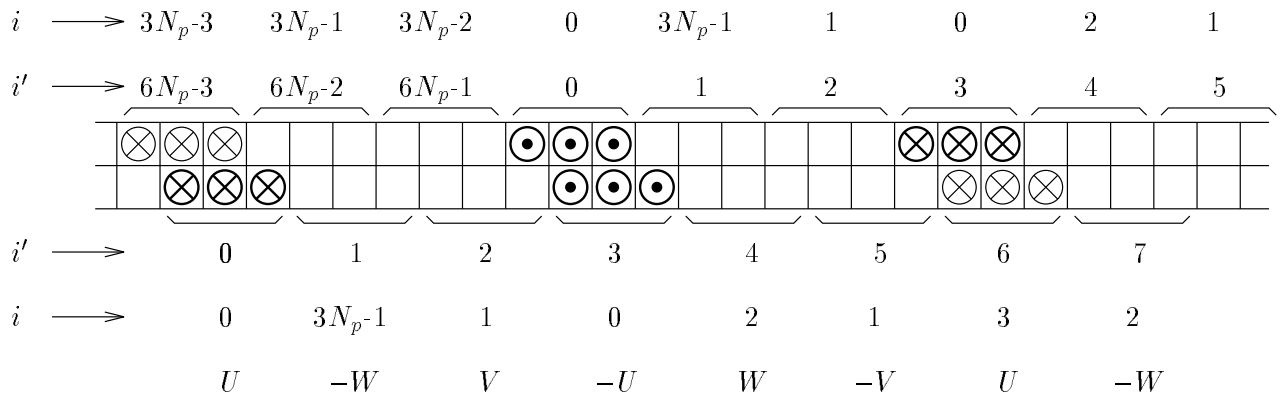
4.4.1.2.2 Parallelschakeling zonder equipotentiaalverbindingen Indien men de equipotentiaalverbindingen weglaat, kan men de stroomverdeling in de wikkeling beschrijven aan de hand van de stromen in de spoelgroepen i.p.v. in de afzonderlijke elementaire spoelgroepen.

Als we i' gebruiken voor de rangnummers van de spoelgroepen en i voor die van de spoelgroepen, zoals aangeduid in Figuur 4.12, bestaat spoelgroep i uit de spoelgroepen $i' = 2i$ en $i' = 2i + 3$ die een tegengestelde stroom voeren. In Figuur 4.12 werd bijvoorbeeld de spoelgroep 0 in vet aangeduid. De aangeduide stroomzinnen in de spoelzijden stemmen hierbij overeen met een positieve stroom in de spoelgroepen. Verder worden aan ieder fase k de spoelgroepen

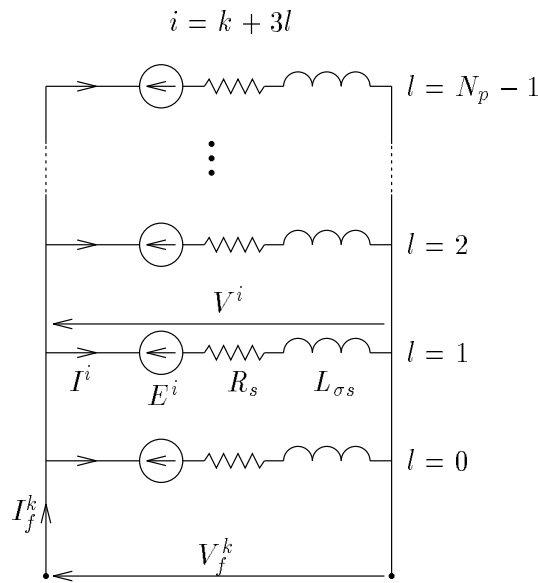
$$i = k + 3l \quad ; \quad l = 0, \dots, N_p - 1 \quad (4.227)$$

toegekend. Het elektrisch netwerk van een fase k wordt voorgesteld in Figuur 4.13. De grootheden I^i , E^i , V^i , R_s en $L_{\sigma s}$ hebben hierbij betrekking op een spoelgroep (i.p.v. op een spoelgroep zoals in vorige paragraaf).

De elektrische vergelijkingen worden nu uitgedrukt aan de hand van de stroom, de gekoppelde flux en (dus) de geïnduceerde spanning in de $3N_p$ spoelgroepen, d.i. één spoelgroep per



Figuur 4.12: Statorwikkeling bij parallelschakeling van de spoelgroepen zonder equipotentiaalverbindingen



Figuur 4.13: Elektrisch netwerk van de statorwikkeling bij parallelschakeling van de spoelgroepen zonder equipotentiaalverbindingen

fase en per poolpaar. Er wordt een lijst opgesteld van de componenten van deze elektrische grootheden die in aanmerking worden genomen, zodat de stroom in de spoelgroepen, en analoge de gekoppelde flux en de geïnduceerde spanning, geschreven worden als:

$$I_s^i(t) = \sum_{k=1}^{N_{is}} \Re \left[\bar{I}_{s_k} e^{j \left(\omega_{is_k} t - \kappa_{is_k} \frac{2\pi}{3N_p} i \right)} \right] \quad (4.228)$$

met

$$\omega_{is_k} > 0 \text{ rad/s} \quad (4.229)$$

$$0 \leq \kappa_{is_k} \leq 3N_p - 1 \quad (4.230)$$

Voor de bepaling van de m.m.k.-bronnen geassocieerd met een stroomcomponent k , m.a.w. met een bepaalde stroomverdeling in de spoelgroepen, beschouwt men de componenten van de stroomverdeling in de elementaire spoelgroepen die hiermee overeenstemmen. Door superpositie van de m.m.k.-bronnen die met deze stromen in de elementaire spoelgroepen gepaard gaan, bekomt men de m.m.k.-bronnen van de beschouwde stroomcomponent.

We beschouwen een stroomcomponent k uit de reeks (4.228) met pulsatie $\omega_{i s_k}$, orde $\kappa_{i s_k}$ en complexe waarde $\bar{I}_{i s_k}$. De stroom in de elementaire spoelgroepen, aangeduid met \bar{I}' , die met deze stroomcomponent van de stroom in de spoelgroepen overeenstemt, is als volgt bepaald. In de even spoelgroepen $i' = 2i$ vloeit de stroom van spoelgroep i , terwijl in de oneven spoelgroepen de $i' = 2i + 3$ de tegengestelde stroom vloeit:

$$\begin{cases} \bar{I}'^{2i} &= \bar{I}_{s_k}^i &= \bar{I}_{i s_k} e^{-j\kappa_{i s_k} \frac{2\pi}{3N_p} i} \\ \bar{I}'^{2i+3} &= -\bar{I}_{s_k}^i &= -\bar{I}_{i s_k} e^{-j\kappa_{i s_k} \frac{2\pi}{3N_p} i} \end{cases} \quad i = 0, \dots, 3N_p - 1 \quad (4.231)$$

De stroomverdeling in de elementaire spoelgroepen wordt d.m.v. een Fourier-ontwikkeling ontbonden in een reeks componenten met orde κ' (met $0 \leq \kappa' \leq 6N_p - 1$) en waarde $\bar{I}'_{\kappa'}$, gegeven door:

$$\bar{I}'_{\kappa'} = \frac{1}{6N_p} \sum_{i'=0}^{6N_p-1} \bar{I}'^{i'} e^{j\kappa' \frac{2\pi}{6N_p} i'} \quad (4.232)$$

$$= \frac{1}{6N_p} \sum_{i=0}^{3N_p-1} \left(\bar{I}'^{2i} e^{j\kappa' \frac{2\pi}{6N_p} 2i} + \bar{I}'^{2i+3} e^{j\kappa' \frac{2\pi}{6N_p} (2i+3)} \right) \quad (4.233)$$

$$= \frac{1}{6N_p} \sum_{i=0}^{3N_p-1} \left(\bar{I}_{s_k} e^{j(\kappa' - \kappa_{i s_k}) \frac{2\pi}{3N_p} i} - \bar{I}_{s_k} e^{j\kappa' \frac{\pi}{N_p}} e^{j(\kappa' - \kappa_{i s_k}) \frac{2\pi}{3N_p} i} \right) \quad (4.234)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - e^{j\kappa' \frac{\pi}{N_p}} \right) \bar{I}_{s_k} \left(\frac{1}{6N_p} \sum_{i=0}^{3N_p-1} e^{j(\kappa' - \kappa_{i s_k}) \frac{2\pi}{3N_p} i} \right) \quad (4.235)$$

Wegens de sommatie in (4.235) is $\bar{I}'_{\kappa'}$ enkel verschillend van nul voor de volgende twee waarden van de orde κ' :

$$\kappa' = \kappa_{i s_k} + 3aN_p \quad ; \quad a = 0, 1 \quad (4.236)$$

en wordt voor deze ordes $\bar{I}'_{\kappa'}$ gegeven door:

$$\bar{I}'_{\kappa'} = \frac{1}{2} \left(1 - e^{j\kappa' \frac{\pi}{N_p}} \right) \bar{I}_{s_k} \quad (4.237)$$

Met beide componenten (4.236) is een reeks m.m.k.-componenten geassocieerd waarvan de ordes $\kappa_{\phi s_l}$ volgens (4.193) gegeven worden door:

$$\begin{aligned} \text{voor } \kappa' = \kappa_{i s_k} & : \quad \kappa_{\phi s_k} = \kappa' + 6aN_p = \kappa_{i s_l} + 6aN_p \\ \text{voor } \kappa' = \kappa_{i s_k} + 3N_p & : \quad \kappa_{\phi s_l} = \kappa' + 6aN_p = \kappa_{i s_k} + 3N_p + 6aN_p \end{aligned} \quad (4.238)$$

met $a = 0, \dots, q - 1$.

Beide reeksen waarden voor $\kappa_{\phi s_l}$ hebben geen gemeenschappelijke elementen en kunnen samen genoteerd worden als:

$$\kappa_{\phi s_l} = \kappa_{i s_k} + 3aN_p \quad ; \quad a = 0, \dots, 2q - 1 \quad (4.239)$$

Gebruik makend van

$$\kappa_{\phi s_l} = \kappa' + 6aN_p \quad \Rightarrow \quad e^{j\kappa' \frac{\pi}{N_p}} = e^{j\kappa_{\phi s_l} \frac{\pi}{N_p}} \quad (4.240)$$

kunnen we, op basis van de elementaire stroomcomponenten (4.237), de hiermee geassocieerde m.m.k.-bronnen gegeven door (4.192) en de ordes (4.239) van deze m.m.k.-bronnen, besluiten dat de m.m.k.-componenten die de beschouwde stroomcomponent k weergeven in het magnetisch netwerk gegeven worden door:

$$\bar{\mathcal{F}}_{s_l} = \frac{3N_p w}{N_s \sin\left(\frac{\kappa_{\phi s_l} \alpha_s}{2}\right)} \bar{\xi}_v(\kappa_{\phi s_l}) \xi_z(\kappa_{\phi s_l}) \left(1 - e^{j\kappa_{\phi s_l} \frac{\pi}{N_p}}\right) \bar{I}_{s_k} \quad (4.241)$$

met

$$\omega_{\phi s_l} = \omega_{i s_k} \quad (4.242)$$

$$\kappa_{\phi s_l} = \kappa_{i s_k} + 3aN_p \quad ; \quad a = 0, \dots, 2q - 1 \quad (4.243)$$

$$\kappa_{\phi s_l} \neq 2aN_p \quad (4.244)$$

In principe zijn er $2q$ m.m.k.-componenten per component van de stroom in de spoelgroepen. Indien $\kappa_{i s_k}$ echter een veelvoud is van N_p zijn er slechts q componenten verschillend van nul wegens de factor $\left(1 - e^{j\kappa_{\phi s_l} \frac{\pi}{N_p}}\right)$ in (4.241) die nul wordt voor $\kappa_{\phi s_l} = 2aN_p$. We kunnen deze ordes dus uitsluiten, vandaar de bijkomende voorwaarde (4.244).

Voor het bepalen van de geïnduceerde spanning in de spoelgroepen, beschouwen we een component van de statortandflux $\bar{\Phi}_{ts_l}(\omega_{\phi s_l}, \kappa_{\phi s_l})$. Aangezien een spoelgroep i is opgebouwd uit de spoelgroepen $i' = 2i$ en $i' = 2i + 3$, wordt de flux gekoppeld met de spoelgroepen i als volgt afgeleid van de fluxen $\bar{\Psi}'$ gekoppeld met de afzonderlijke spoelgroepen die gegeven worden door (4.199) :

$$\bar{\Psi}^i = \bar{\Psi}'^{2i} - \bar{\Psi}'^{2i+3} \quad (4.245)$$

$$= \frac{w}{\sin\left(\frac{\kappa_{\phi s_l} \alpha_s}{2}\right)} \bar{\xi}_v^*(\kappa_{\phi s_l}) \xi_z(\kappa_{\phi s_l}) \left(e^{-j\kappa_{\phi s_l} \frac{\pi}{3N_p} 2i} - e^{-j\kappa_{\phi s_l} \frac{\pi}{3N_p} (2i+3)}\right) \bar{\Phi}_{ts_l} \quad (4.246)$$

$$= \frac{w}{\sin\left(\frac{\kappa_{\phi s_l} \alpha_s}{2}\right)} \bar{\xi}_v^*(\kappa_{\phi s_l}) \xi_z(\kappa_{\phi s_l}) \left(1 - e^{-j\kappa_{\phi s_l} \frac{\pi}{N_p}}\right) e^{-j\kappa_{\phi s_l} \frac{2\pi}{3N_p} i} \bar{\Phi}_{ts_l} \quad (4.247)$$

waarbij de orde κ van de flux gekoppeld met de spoelgroepen gegeven wordt door:

$$\kappa = \kappa_{\phi s_l} \text{ modulo } 3N_p \quad (4.248)$$

Aangezien de gekoppelde flux $\bar{\Psi}^i$ nul wordt voor $\kappa_{\phi s_l} = 2aN_p$, kunnen we uit de uitdrukking (4.247) voor de gekoppelde flux besluiten dat de k -de component van de geïnduceerde spanning in de spoelgroepen gegeven wordt door:

$$\bar{E}_{s_k} = j\omega_{is_k} \sum_l \frac{w}{\sin\left(\frac{\kappa_{\phi s_l} \alpha_s}{2}\right)} \bar{\xi}_v^*(\kappa_{\phi s_l}) \xi_z(\kappa_{\phi s_l}) \left(1 - e^{-j\kappa_{\phi s_l} \frac{\pi}{N_p}}\right) \bar{\Phi}_{t_{s_l}} \quad (4.249)$$

met

$$\omega_{\phi s_l} = \omega_{is_k} \quad (4.250)$$

$$\kappa_{\phi s_l} = \kappa_{is_k} + 3aN_p ; a = 0, \dots, 2q - 1 \quad (\kappa_{\phi s_l} \text{ modulo } 3N_p = \kappa_{is_k}) \quad (4.251)$$

$$\kappa_{\phi s_l} \neq 2aN_p \quad (4.252)$$

Elke component van de geïnduceerde spanning wordt volgens (4.251) bepaald door $2q$ verschillende statorfluxcomponenten, behalve voor componenten met orde $\kappa_{is_k} = aN_p$ die wegens (4.252) slechts door q statorfluxcomponenten worden bepaald.

Voor het opstellen van de spanningsvergelijkingen verwijzen we opnieuw naar Appendix F. Ze kunnen als volgt worden samengevat:

- Voor alle stroomcomponenten met ordes die geen veelvoud van N_p zijn geldt de volgende spanningsvergelijking:

$$\bar{E}_{s_k} + (R_s + j\omega_{is_k} L_{\sigma s}) \bar{I}_{s_k} = 0 \quad \text{voor } \kappa_{is_k} \neq aN_p \quad (4.253)$$

- Voor componenten met ordes die een veelvoud van N_p zijn, m.a.w. voor

$$\kappa_{is_k} = aN_p \quad ; \quad a = 0, 1, \text{ of } 2 \quad (4.254)$$

is de spanning over de spoelgroepen gelijk aan de aangelegde fasespanning:

$$2 [\bar{E}_{s_k} + (R_s + j\omega_{is_k} L_{\sigma s}) \bar{I}_{s_k}] = \bar{V}_{f_l} \quad (4.255)$$

met

$$\omega_{is_k} = \omega_{v_l} \quad (4.256)$$

$$\frac{\kappa_{is_k}}{N_p} \text{ modulo } 3 = \kappa_{v_l} \quad (4.257)$$

Bij niet-verbonden sterschakeling vervallen de spanningsvergelijkingen voor de homopolaire spanningscomponenten $\kappa_{is_k} = 0$, waarbij eveneens bij het opstellen van de lijst van stroomcomponenten de componenten met ordes $\kappa_{is_k} = 0$ kunnen worden weggelaten.

4.4.1.2.3 Serieschakeling Bij de derde schakeling die hier behandeld wordt, worden alle spoelgroepen die aan een fase worden toegekend in serie geschakeld. De even en oneven spoelgroepen i' van een fase i ($i = 0, 1, 2$) worden, zoals ook aangeduid in Figuur 4.14, gegeven door

$$\begin{cases} i' = 2i + 6a \\ i' = 2i + 3 + 6a \end{cases} \quad a = 0, \dots, N_p - 1 \quad (4.258)$$

waarbij zoals steeds de even en de oneven spoelgroepen in tegengestelde zin zijn geschakeld.

De stroomverdeling wordt nu volledig bepaald door de drie fasestromen die in de volgende reeks ontbonden worden:

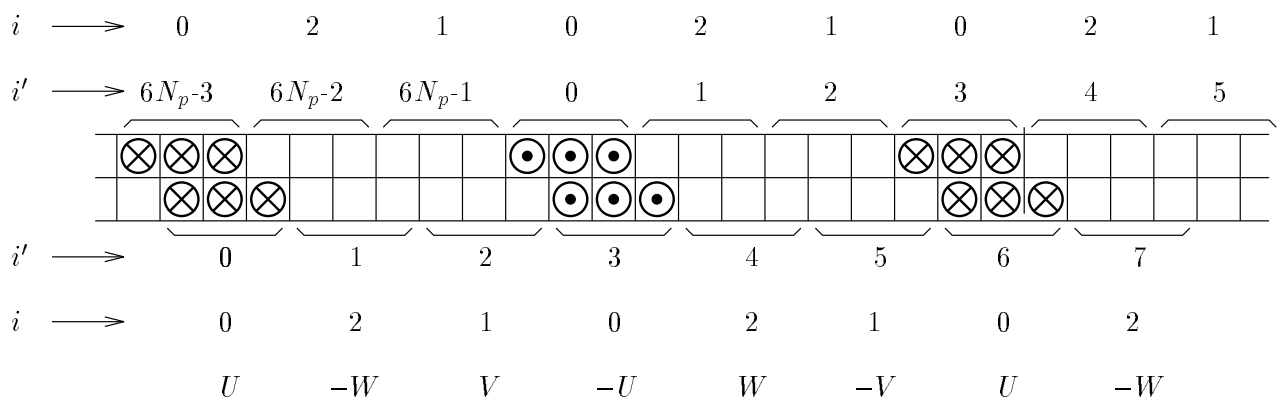
$$I_s^i(t) = \sum_{k=1}^{N_{is}} \Re \left(\bar{I}_{s_k} e^{j(\omega_{is_k} t - \kappa_{is_k} \frac{2\pi}{3} i)} \right) \quad (4.259)$$

met

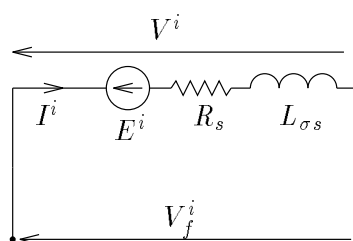
$$\omega_{is_k} > 0 \text{ rad/s} \quad (4.260)$$

$$\kappa_{is_k} = 0, 1, \text{ of } 2 \quad (4.261)$$

In Figuur 4.14 is bijvoorbeeld een deel van fasewikkeling U ($i=0$) weergegeven, waarbij de aangeduide stroomzin in de spoelzijden overeenstemt met een positieve fasestroom. Het elektrisch



Figuur 4.14: Statorwikkeling bij serieschakeling



Figuur 4.15: Elektrisch netwerk van de statorwikkeling bij serieschakeling van de spoelgroepen

netwerk van een fase i is voorgesteld in Figuur 4.15, waarbij de grootheden I^i , E^i , V^i , R_s en $L_{\sigma s}$ nu betrekking hebben op een volledige fasewikkeling.

Voor de bepaling van de m.m.k.-bronnen geassocieerd met iedere stroomcomponent $\bar{I}_{s_k}(\omega_{i s_k}, \kappa_{i s_k})$, beschouwen we opnieuw de stroomverdeling I' in de elementaire spoelgroepen die met een stroomcomponent k overeenkomt. De stroom door de even spoelgroepen is gelijk aan de fasestroom terwijl de oneven spoelgroepen het tegengestelde van de fasestroom voeren:

$$\begin{cases} \bar{I}'^{2i+6l} &= \bar{I}_{s_k}^i &= \bar{I}_{\kappa_{i s_k}} e^{-j\kappa_{i s_k} \frac{2\pi}{3} i} \\ \bar{I}'^{2i+3+6l} &= -\bar{I}_{s_k}^i &= -\bar{I}_{\kappa_{i s_k}} e^{-j\kappa_{i s_k} \frac{2\pi}{3} i} \end{cases} \quad i = 0, 1, 2; \quad l = 0, \dots, N_p - 1 \quad (4.262)$$

Door middel van een Fourier-ontwikkeling wordt deze stroomverdeling I' ontbonden in een reeks componenten met ordes κ' ($0\kappa' \leq 6N_p - 1$) waarbij de complexe waarde gegeven wordt door:

$$\bar{I}'_{\kappa'} = \frac{1}{6N_p} \sum_{l=0}^{N_p-1} \sum_{i=0}^2 \left(\bar{I}'^{2i+6l} e^{j\kappa' \frac{\pi}{3N_p} (2i+6l)} + \bar{I}'^{2i+3+6l} e^{j\kappa' \frac{\pi}{3N_p} (2i+3+6l)} \right) \quad (4.263)$$

$$= \frac{1}{6N_p} \sum_{l=0}^{N_p-1} e^{j\kappa' \frac{2\pi}{N_p} l} \sum_{i=0}^2 \left(\bar{I}_{\kappa} e^{j(\kappa' - \kappa N_p) \frac{2\pi}{3N_p} i} - \bar{I}_{\kappa} e^{j\kappa' \frac{\pi}{N_p} i} e^{j(\kappa' - \kappa N_p) \frac{2\pi}{3N_p} i} \right) \quad (4.264)$$

$$= \frac{1}{6N_p} \left(\sum_{l=0}^{N_p-1} e^{j\kappa' \frac{2\pi}{N_p} l} \right) \left(1 - e^{j\kappa' \frac{\pi}{N_p}} \right) \left(\sum_{i=0}^2 e^{j(\kappa' - \kappa_{i s_k} N_p) \frac{2\pi}{3} i} \right) \bar{I}_{s_k} \quad (4.265)$$

Wegens de eerste sommatie (over de index l) in (4.265) is $\bar{I}'_{\kappa'}$ slechts verschillend van nul als κ' een N_p -voud is:

$$\kappa' = aN_p \quad (4.266)$$

In dit geval is de tweede sommatie (over de index i) in (4.265) slechts verschillend van nul indien κ' voldoet aan:

$$\frac{\kappa'}{N_p} = \kappa_{i s_k} + 3a \quad ; \quad a = 0, 1 \quad (4.267)$$

Bovendien moet κ' een oneven veelvoud van N_p zijn opdat de factor $1 - e^{j\kappa' \frac{\pi}{N_p}}$ in (4.265) niet nul zou worden:

$$\kappa' = (2a + 1)N_p \quad (4.268)$$

Uit de voorwaarden (4.266), (4.267) en (4.268) volgt dat voor de drie mogelijke waarden van $\kappa_{i s_k}$ de stroom in de elementaire spoelgroepen slechts één component bevat waarvan de orde κ' gegeven wordt door:

$$\begin{aligned} \kappa_{i s_k} = 0 &\Rightarrow \kappa' = 3N_p \\ \kappa_{i s_k} = 1 &\Rightarrow \kappa' = N_p \\ \kappa_{i s_k} = 2 &\Rightarrow \kappa' = 5N_p \end{aligned} \quad (4.269)$$

of kortweg:

$$\kappa' = \left(\kappa_{is_k} + 3 \frac{1 + (-1)^{\kappa_{is_k}}}{2} \right) N_p \quad (4.270)$$

Voor deze waarden van κ' is volgens (4.265) $\bar{I}'_{\kappa'}$ gelijk aan de beschouwde component van fasestroom:

$$\bar{I}'_{\kappa'} = \bar{I}_{s_k} \quad (4.271)$$

De reeks componenten van de m.m.k. geassocieerd met een component k van de fasestroom wordt dus rechtstreeks gegeven door de m.m.k.-bronnen van de overeenkomstige elementaire stroomcomponent met orde κ' gegeven door (4.270). Volgens (4.270), (4.271) en (4.192), worden de componenten van de m.m.k.-bronnen in het magnetisch netwerk die een component k van de fasestroom voorstellen gegeven door :

$$\bar{\mathcal{F}}_{s_l} = \frac{6N_p w}{N_s \sin\left(\frac{\kappa_{\phi s_l} \alpha_s}{2}\right)} \xi_z(\kappa_{\phi s_l}) \bar{\xi}_v(\kappa_{\phi s_l}) \bar{I}_{s_k} \quad (4.272)$$

met

$$\omega_{\phi s_l} = \omega_{is_k} \quad (4.273)$$

$$\kappa_{\phi s_l} = \left(\kappa_{is_k} + 3 \frac{1 + (-1)^\kappa}{2} + 6a \right) N_p \quad ; \quad a = 0, \dots, q-1 \quad (4.274)$$

We beschouwen verder een statortandfluxcomponent $\bar{\Phi}_{ts_l}(\omega_{\phi s_l}, \kappa_{\phi s_l})$ voor het bepalen van de gekoppelde flux met de fasewikkelingen. Aan de hand van de opbouw van de fasewikkeling uit de even en oneven spoelgroepen volgens (4.258) en van de flux gekoppeld met elke spoelgroep volgens (4.199) wordt de flux gekoppeld met fasewikkeling i gegeven door:

$$\bar{\Psi}^i = \sum_{l=0}^{N_p-1} \bar{\Psi}^{i+6l} - \bar{\Psi}^{i+3+6l} \quad (4.275)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{w}{\sin\left(\frac{\kappa_{\phi s_l} \alpha_s}{2}\right)} \xi_z(\kappa_{\phi s_l}) \bar{\xi}_v^*(\kappa_{\phi s_l}) \sum_{l=0}^{N_p-1} e^{-j\kappa_{\phi s_l} \frac{2\pi}{N_p} l} \left(1 - e^{-j\kappa_{\phi s_l} \frac{\pi}{N_p}}\right) e^{-j\kappa_{\phi s_l} \frac{2\pi}{3N_p} i} \bar{\Phi}_{ts_l} \\ &= \frac{w}{\sin\left(\frac{\kappa_{\phi s_l} \alpha_s}{2}\right)} \xi_z(\kappa_{\phi s_l}) \bar{\xi}_v^*(\kappa_{\phi s_l}) \sum_{l=0}^{N_p-1} e^{-j\kappa_{\phi s_l} \frac{2\pi}{N_p} l} \left(1 - e^{-j\kappa_{\phi s_l} \frac{\pi}{N_p}}\right) e^{-j\kappa_{\phi s_l} \frac{2\pi}{3} i} \bar{\Phi}_{ts_l} \end{aligned} \quad (4.276)$$

waarbij de gekoppelde flux enkel verschillend is van nul indien

$$\kappa_{\phi s_l} = (2a + 1)N_p \quad (4.277)$$

en waarbij de orde κ (met $0 \leq \kappa \leq 2$) van de flux gekoppeld met de fasewikkelingen gegeven wordt door:

$$\kappa = \frac{\kappa_{\phi s_l}}{N_p} \text{ modulo } 3 \quad (4.278)$$

Een statortandfluxcomponent l waarvan de orde voldoet aan (4.277) veroorzaakt dus een flux gekoppeld met de fasewikkelingen met orde κ gegeven door (4.278) en met complexe waarde in de i -de fase:

$$\bar{\Psi}^i = \frac{2N_p w}{\sin\left(\frac{\kappa_{\phi s_l} \alpha_s}{2}\right)} \bar{\xi}_v^*(\kappa_{\phi s_l}) \xi_z(\kappa_{\phi s_l}) e^{-j\kappa \frac{2\pi}{3} i} \bar{\Phi}_{ts_l} \quad (4.279)$$

De voorwaarde voor $\kappa_{\phi s_l}$ (4.277) en het verband tussen κ en $\kappa_{\phi s_l}$ (4.278) kunnen samen weer-gegeven worden door de volgende vergelijking:

$$\kappa_{\phi s_l} = \left(\kappa + 3 \frac{1 + (-1)^\kappa}{2} + 6a \right) N_p \quad ; \quad a = 0, \dots, q-1 \quad (4.280)$$

Elke component van de gekoppelde flux en de geïnduceerde spanning in de fasewikkelingen wordt dus bepaald door q componenten van de statortandflux. De componenten van de geïnduceerde spanning worden bijgevolg als volgt uitgedrukt in functie van de componenten van de statortandflux:

$$\bar{E}_{s_k} = j\omega_{is_k} \sum_l \frac{2N_p w}{\sin\left(\frac{\kappa_{\phi s_l} \alpha_s}{2}\right)} \bar{\xi}_v^*(\kappa_{\phi s_l}) \xi_z(\kappa_{\phi s_l}) \bar{\Phi}_{ts_l} \quad (4.281)$$

met

$$\omega_{\phi s_l} = \omega_{is_k} \quad (4.282)$$

$$\kappa_{\phi s_l} = \left(\kappa_{is_k} + \frac{1 + (-1)^{\kappa_{is_k}}}{2} + 6a \right) N_p \quad ; \quad a = 0, \dots, q-1 \quad (4.283)$$

Bij serieschakeling luiden de spanningsvergelijkingen als volgt (zie ook Appendix F):

$$\bar{E}_{s_k} + (R_s + j\omega_{is_k} L_{\sigma s}) \bar{I}_{s_k} = \bar{V}_{f_l} \quad (4.284)$$

met

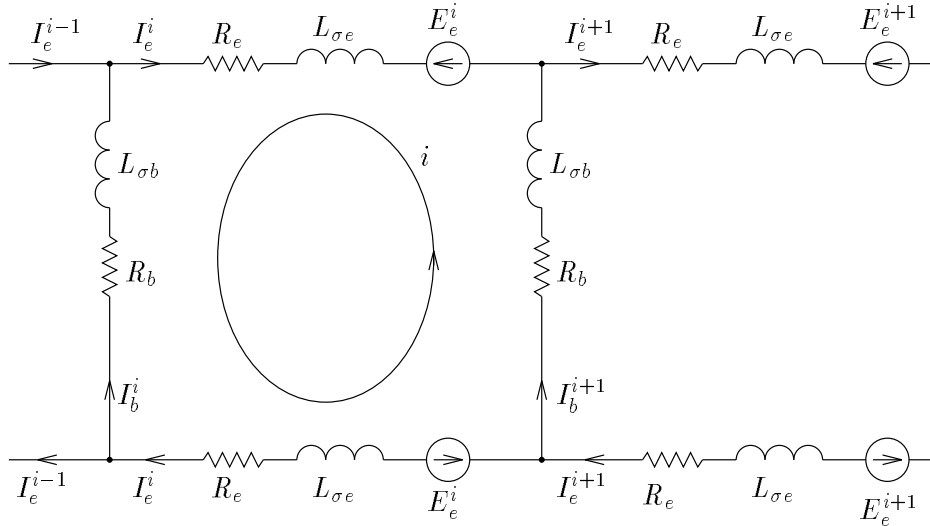
$$\omega_{is_k} = \omega_{v_l} \quad (4.285)$$

$$\kappa_{is_k} = \kappa_{v_l} \quad (4.286)$$

Bij niet-verbonden ster komen homopolaire stromen ($\kappa_{is_k} = 0$) niet voor, en vervalt de corresponderende spanningsvergelijking.

4.4.2 Rotorkooi

Voor het opstellen van de elektrische vergelijkingen van de rotorkooi beschouwen we het elektrisch netwerk voorgesteld in Figuur 4.16. De grootheden met index b hebben betrekking op de staven (baren) van de rotorkooi terwijl de index e de grootheden van de eindringen aanduidt.



Figuur 4.16: Elektrisch circuit van de rotorkooi

Voor de eenvoud nemen we hierbij aan dat de asfluxen aan beide asuiteinden gelijk zijn, of m.a.w. dat de reluctanties van de sluitweg van de asflux buiten de kern aan beide uiteinden van de machine gelijk zijn. Aangezien de spanningen geïnduceerd in beide eindringen door de asflux dan gelijk zijn, zijn in iedere rotorsector de stromen in beide eindringsegmenten aan elkaar gelijk.

Aangezien het elektrische netwerk van de rotor (de rotorkooi) net als het magnetisch netwerk van de rotor opgebouwd is uit N_r rotorsectoren, elk bestaande uit één rotorstaaf en één eindringsegment, worden de elektrische grootheden (stromen, geïnduceerde spanningen, ...) van de rotorkooi op dezelfde manier in componenten ontbonden als de magnetische grootheden van de rotor. De stroom in het i -de eindringsegment (van beide eindringen) wordt als volgt in componenten ontbonden:

$$I_e^i(t) = \sum_{k=1} N_{ir} \Re \left(\bar{I}_{e_k} e^{j(\omega_{ir_k} t - \kappa_{ir_k})} \right) \quad (4.287)$$

met

$$\omega_{ir_k} > 0 \text{ rad/s} \quad (4.288)$$

$$0 \leq \kappa_{ir_k} \leq N_r - 1 \quad (4.289)$$

De componenten $(\omega_{ir_k}, \kappa_{ir_k})$ van de elektrische grootheden zijn dezelfde als de componenten $(\omega_{\phi r_k}, \kappa_{\phi r_k})$ van de magnetische grootheden, met dien verstande dat bij de elektrische grootheden de componenten met pulsatie gelijk aan nul worden uitgesloten, aangezien er geen gelijkspanning in de rotorkooi kan geïnduceerd worden.

De rotorstromen worden in het magnetisch netwerk weergegeven door m.m.k.-bronnen in de rotortanden met een potentiaalverschil gelijk aan de stroom in de eindringen, zoals uiteengezet in §4.3.5. De componenten van de m.m.k.-bronnen zijn dus gelijk aan de corresponderende componenten van de stromen in de eindringen:

$$\bar{\mathcal{F}}_{r_l} = \bar{I}_{e_k} \quad (4.290)$$

met

$$\omega_{\phi r_l} = \omega_{ir_k} \quad (> 0 \text{ rad/s}) \quad (4.291)$$

$$\kappa_{\phi r_l} = \kappa_{ir_k} \quad (4.292)$$

Ook de elektrische netwerkvergelijkingen kunnen worden uitgedrukt in functie van de stromen in de eindringsegmenten. De componenten van de staaftstromen kunnen immers als volgt geschreven worden in functie van de componenten van de stroom in de eindringen:

$$I_b^i = I_e^i - I_e^{i-1} \quad (4.293)$$

$$\Rightarrow \bar{I}_{b_k} = \frac{1}{\zeta_r(-\kappa_{ir_k})} \bar{I}_{e_k} \quad ; \quad k = 1, \dots, N_{ir} \quad (4.294)$$

waarbij

$$\frac{1}{\zeta_r(-\kappa_{ir_k})} = 0 \quad \text{voor} \quad \kappa_{ir_k} = 0 \quad (4.295)$$

zodat er geen staaftstromen van nulde orde voorkomen. De som van de staaftstromen moet inderdaad gelijk aan nul zijn.

De geïnduceerde spanning in de lussen van het elektrisch netwerk kan voorgesteld worden d.m.v. spanningsbronnen in de eindringsegmenten, zoals weergegeven in Figuur 4.16, die gegeven worden door:

$$\bar{E}_{e_k} = \frac{1}{2} j \omega_{ir_k} \bar{\Phi}_{tr_l} \quad (4.296)$$

met

$$\omega_{\phi r_l} = \omega_{ir_k} \quad (> 0 \text{ rad/s}) \quad (4.297)$$

$$\kappa_{\phi r_l} = \kappa_{ir_k} \quad (4.298)$$

Inderdaad, beschouwen we ten eerste de spanningsvergelijkingen voor de lussen van het elektrisch netwerk, bestaande uit twee naburige rotorstaven i en $i + 1$ verbonden door de corresponderende eindringsegmenten i , zoals aangeduid in Figuur 4.16. De flux gekoppeld met de i -de lus is gelijk aan de flux in de i -de rotortand, zodat de spanningsbronnen E_e die gegeven worden door (4.296) en die per lus twee keer voorkomen (zie Figuur 4.16), de geïnduceerde spanning in de lussen correct weergeven.

De spanningsvergelijkingen in de lussen leiden tot de volgende vergelijkingen voor de stroomcomponenten :

$$2 [\bar{E}_{e_k} + (R_e + j \omega_{ir_k} L_{\sigma e}) \bar{I}_{e_k}] + (R_b + j \omega_{ir_k} L_{\sigma b}) \frac{\bar{I}_{b_k}}{\zeta_r(\kappa_{ir_k})} = 0 \quad (4.299)$$

die met behulp van (4.294) en (4.137) als volgt in functie van de componenten van de stroom in de eindringsegmenten kunnen geschreven worden:

$$\bar{E}_{e_k} + \left[R_e + j\omega_{ir_k} L_{\sigma e} + \sin^2(\kappa_{ir_k}) (R_b + j\omega_{ir_k} L_{\sigma b}) \right] \bar{I}_{e_k} = 0 \quad ; \quad k = 1, \dots, N_{ir} \quad (4.300)$$

Beschouwen we ten tweede een lus van het elektrisch netwerk van de rotor gevormd door een eindring. Wegens de gemaakte veronderstelling dat de asfluxen aan beide uiteinden gelijk zijn, is de flux gekoppeld met deze lus gelijk aan de helft van de totale asflux. Aangezien de asflux gelijk is aan de som van de rotortandfluxen van nulde orde, worden de componenten van de flux gekoppeld met een eindring dus gegeven door:

$$\Psi_{e_k} = \frac{1}{2} N_r \bar{\Phi}_{tr_k} \quad \text{met} \quad \kappa_{ir_k} = 0 \quad (4.301)$$

Uit het elektrisch netwerk van Figuur 4.16 en de uitdrukking voor de spanningsbronnen (4.296) volgt dat deze spanningsbronnen eveneens de geïnduceerde spanningen in de eindringen correct weergeven. Voor stroomcomponenten van nulde orde ($\kappa_{ir_k} = 0$), m.a.w. voor de kringstromen in de eindringen, herleiden de vergelijkingen (4.300) zich immers tot :

$$\bar{E}_{e_k} + (R_e + j\omega_{ir_k} L_{\sigma e}) \bar{I}_{e_k} = 0 \quad \text{voor} \quad \kappa_{ir_k} = 0 \quad (4.302)$$

die met behulp van (4.296) als volgt kunnen genoteerd worden:

$$j\omega_{ir_k} \frac{N_r}{2} \bar{\Phi}_{r_k} + N_r (R_e + j\omega_{ir_k} L_{\sigma e}) \bar{I}_{e_k} = 0 \quad ; \quad \kappa_{ir_k} = 0 \quad (4.303)$$

4.5 Koppeling van de magnetische en de elektrische netwerkvergelijkingen

De koppeling van de magnetische en de elektrische netwerkvergelijkingen die in vorige paragrafen zijn afgeleid laat ons nu toe de magnetische en elektrische grootheden van het model te bepalen in functie van de aangelegde spanning. Dit gebeurt aan de hand van een stelsel algebraïsche vergelijkingen dat als volgt wordt opgesteld:

1. We beschouwen de volgende magnetische netwerkvergelijkingen opgesteld in §4.3.6.2: (4.164), (4.165), (4.166) en (4.166). Door middel van de vergelijkingen (4.168)-(4.175) kunnen deze vergelijkingen omgevormd worden tot vergelijkingen met de componenten van de stator- en rotortandflux en de componenten van de stator- en rotorjokflux van nulde orde als onbekenden en de spanningsval over de m.m.k.-bronnen als brontermen. Dit zijn ($N_{\phi_s} + N_{\phi_r} + 2N_{\phi_0}$) vergelijkingen met evenveel onbekenden, m.a.w. één vergelijking per tandfluxcomponent en één vergelijking per jokfluxcomponent van nulde orde. Deze vergelijkingen laten dus toe de tandfluxen en de jokfluxen van nulde orde te berekenen in functie van de m.m.k.-bronnen.
2. We beschouwen verder de elektrische netwerkvergelijkingen opgesteld in §4.4. Voor de drie beschouwde types van de statorwikkeling, respectievelijk besproken in §4.4.1.2.1, §4.4.1.2.2 en

§4.4.1.2.3, kan per statorstroomcomponent een spanningsvergelijking worden opgesteld met de geïnduceerde en de aangelegde spanning als brontermen. Deze spanningsvergelijkingen worden gegeven door (4.221) en (4.223) bij een parallelschakeling van de spoelgroepen met equipotentiaalverbindingen, door (4.253) en (4.255) bij een parallelschakeling zonder equipotentiaalverbindingen en door (4.284) bij een serieschakeling van de spoelgroepen.

Voor de rotorkooi kan, zoals besproken in §4.4.2 per component van de stroom in de eindringsegmenten een spanningsvergelijking (4.300) worden opgesteld met de geïnduceerde spanning als bronterm, die zich voor de stroomcomponenten van nulde orde herleidt tot de spanningsvergelijking (4.302).

De spanningsvergelijkingen voor de statorwikkeling en rotorkooi vormen dus $N_{is} + N_{ir}$ vergelijkingen met evenveel onbekenden die ons toelaten de statorstromen en de rotorstromen in de eindringsegmenten te berekenen in functie van de aangelegde en de geïnduceerde spanning.

3. Tenslotte beschouwen we de wederzijdse koppeling tussen het magnetisch en het elektrisch netwerk.

Eenzijds worden de brontermen van de magnetische netwerkvergelijkingen, nl. de componenten van het potentiaalverschil over de m.m.k.-bronnen, uitgedrukt in functie van de onbekenden van de elektrische vergelijkingen, net name de stroomcomponenten. Voor de drie behandelde types van statorwikkelingen worden de m.m.k.-bronnen respectievelijk gegeven door (4.215), (4.241) en (4.272) in functie van de statorstromen. Voor de rotor zijn de componenten van de m.m.k.-bronnen gelijk aan de corresponderende componenten van de stroom in de eindringsegmenten, zoals uitgedrukt door (4.290).

Anderzijds worden de geïnduceerde spanningen, die naast de aangelegde spanning als bronterm voor de elektrische vergelijkingen optreden, uitgedrukt in functie van de onbekenden van het magnetisch netwerk, meer bepaald in functie van de stator- en rotortandfluxen. Voor de drie beschouwde statorwikkelingstypes worden de componenten van de geïnduceerde spanning geschreven in functie van de statortandfluxcomponenten volgens respectievelijk (4.218), (4.249) en (4.281). De spanningsbronnen die de geïnduceerde spanning voorstellen in het elektrisch netwerk van de rotor worden bepaald door de rotortandfluxen volgens (4.296).

Het gekoppeld magnetisch-elektrisch netwerk resulteert aldus in een stelsel met $N_{\phi_s} + N_{\phi_r} + 2N_{\phi_0} + N_{is} + N_{ir}$ complexe onbekenden, nl. de $N_{\phi_s} + N_{\phi_r}$ componenten van de stator- en rotortandflux, de $2N_{\phi_0}$ jukfluxcomponenten van nulde orde in stator en rotor, de N_{is} statorstroomcomponenten en de N_{ir} componenten van de stroom in de eindringsegmenten van de rotorkooi. Dit stelsel wordt omgevormd tot een stelsel algebraïsche vergelijkingen met dubbel zoveel reële onbekenden, nl. de reële en imaginaire delen van de hierboven opgesomde complexe onbekenden.

Wegens de niet-lineariteit van de reluctanties en permeanties van het magnetisch netwerk wordt beroep gedaan op een iteratieve oplossingsmethode, met name de Newton-Raphson-methode. De Jacobiaanse matrix geassocieerd met de systeemmatrix wordt hierbij bekomen door de reluctanties van het magnetisch netwerk te vervangen door de differentiële reluctanties. De laatste worden op dezelfde manier als de reluctanties bepaald mits de reluctiviteit $\nu = \frac{H}{B}$ te vervangen door de differentiële reluctiviteit, die als volgt gedefinieerd is:

$$\nu_{diff} = \frac{\partial H}{\partial B} \tag{4.304}$$

Met behulp van de magnetische en elektrische netwerkvergelijkingen opgesteld in §4.3.6 en §4.4 kunnen, op basis van de bekomen oplossing voor de tandfluxen, de jukfluxen van nulde orde en de stromen, alle andere grootheden van het magnetisch en het elektrisch netwerkmodel afgeleid worden, zoals de juk- en tandpotentialen, de jukfluxen met ordes verschillend van nul, de flux die de luchtspleet oversteekt, de spreidingsflux, de stromen in de rotorstaven enz.

In de volgende paragrafen wordt aangetoond hoe de magnetische krachtwerking in de machine kan bepaald worden op basis van de resultaten van de magnetische veldberekening.

4.6 Magnetische langeafstandskrachtwerking

Voor het berekenen van de magnetische krachtwerking in de inductiemachine, gemodelleerd aan de hand van een magnetisch netwerk, doen we beroep op het principe van de virtuele arbeid. Zoals aangetoond in Hoofdstuk 2 kan men met behulp van dit principe de magnetische langeafstandskracht op (een deel van een) magnetisch lichaam bepalen. Per definitie van langeafstandskracht, wordt het beschouwde deel van het magnetisch lichaam hierbij afgezonderd van de rest van het magnetisch materiaal door middel van een microscopische snede.

Het principe van de virtuele arbeid wordt nu toegepast voor het berekenen van de magnetische langeafstandskracht op delen van een magnetisch lichaam die overeenstemmen met een netwerkelement (een reluctantie of permeantie) in een magnetisch netwerk, of kortweg de kracht op de magnetische netwerkelementen. Een magnetisch netwerkelement waarop men de kracht wenst te bepalen, moet hierbij gescheiden zijn van de andere netwerkelementen die magnetisch materiaal voorstellen door middel van een netwerkelement dat niet-magnetisch materiaal voorstelt. Dit laatste is ofwel een fysisch netwerkelement ofwel een denkbeeldig netwerkelement met infinitesimale reluctantie, m.a.w. een microscopische snede die men moet aanbrengen om het deel van het magnetisch materiaal af te zonderen. Men kan immers slechts een virtuele verplaatsing van een magnetisch netwerkelement beschouwen als het gescheiden is van de rest van het materiaal.

In tegenstelling tot de berekeningsmethode voorgesteld in Hoofdstuk 2 en toegepast in Hoofdstuk 3 waarbij de vervorming ten gevolge van de magnetische langeafstandskracht wordt bepaald aan de hand van de (fictieve) elektromagnetische krachtdichtheid \vec{f}_{em} , wordt nu (slechts) de krachtenverdeling over de afzonderlijke netwerkelementen en niet de vervorming van de elementen zelf bepaald.

In de volgende paragrafen wordt eerst de basisvergelijking voor het berekenen van de magnetische krachtwerking op magnetische netwerkelementen afgeleid en dan toegepast op het netwerkmodel van de inductiemachine in het frequentie-orde-domein.

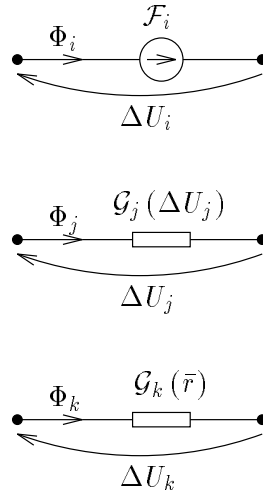
4.6.1 Principe van de virtuele arbeid toegepast op een magnetisch netwerkmodel

Het principe van de virtuele arbeid kan algemeen als volgt geformuleerd worden. De elektrisch toegevoerde arbeid dW_e , de zgn. arbeid verricht door de spanningsbronnen, bij een virtuele lineaire verplaatsing $d\vec{r}$ van een magnetisch lichaam wordt enerzijds omgezet in magnetische energie⁶ W en

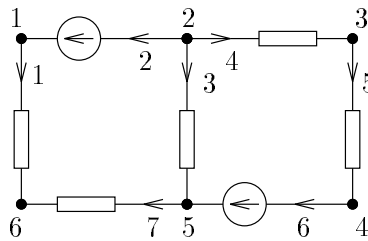
deels omgezet in mechanische arbeid, m.a.w. als de kracht \vec{F} maal de verplaatsing $d\vec{r}$:

$$dW_e = dW + \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (4.305)$$

Dit principe wordt nu toegepast voor het bepalen van de kracht op het magnetisch materiaal voorgesteld door een magnetisch netwerkelement.



Figuur 4.17: netwerkelementen



Figuur 4.18: Voorbeeld van een magnetisch netwerk

We beschouwen daartoe drie soorten netwerkelementen, voorgesteld in Figuur 4.17 . Voor de eenvoud van de verdere redenering beschouwen we voor ieder netwerkelement een afzonderlijke tak in de netwerkvoorstelling, zoals geïllustreerd in het eenvoudig voorbeeld van Figuur 4.18. Indien we voor de takken een positieve fluxzin kiezen volgt de referentiezijn van de potentiaalverschil ΔU over de takken volgens het V.R.S.. De drie soorten netwerkelementen zijn de volgende:

- m.m.k.-bronnen.

⁶We gebruiken hier het symbool W voor de magnetische energie i.p.v. U zoals in Hoofdstuk 2, omdat U hier gebruikt wordt om de scalaire magnetische potentiaal aan te duiden. Verder beschouwen we hier enkel niet-hysteretisch materiaal zodat er geen dissipatie optreedt.

De referentiezijn voor het potentiaalverschil \mathcal{F}_i wordt gekozen in functie van de positieve fluxzijn volgens het G.R.S., en is dus tegengesteld aan de potentiaalval ΔU_i over de takken die een m.m.k.-bron bevatten :

$$\Delta U_i = -\mathcal{F}_i \quad (4.306)$$

De m.m.k.-bronnen en de overeenkomstige takken van het netwerk worden als volgt genummerd:

$$i = i_1, \dots, i_2 \quad (4.307)$$

- netwerkelementen die magnetisch materiaal voorstellen. De permeantie van deze netwerkelementen is (in geval van een niet-lineaire B - H -karakteristiek) functie van de potentiaalval zodat het verband tussen flux en potentiaalval in de volgende vorm kan geschreven worden:

$$\Phi_j = \mathcal{G}_j(\Delta U_j)\Delta U_j \quad (4.308)$$

waarbij

$$j = j_1, \dots, j_2 \quad (4.309)$$

We wensen de magnetische langeafstandskracht op één dergelijk netwerkelement te bepalen. Daartoe beschouwen we een (virtuele) beweging als star lichaam van het betreffende magnetisch materiaal terwijl de rest van het magnetisch materiaal zich niet verplaatst.

De vervorming van het magnetisch materiaal wordt niet in aanmerking genomen zodat de permeanties van deze netwerkelementen enkel afhankelijk zijn van de potentiaalval.

Zij verder \bar{r} de plaatsvector van het beschouwde magnetisch materiaal en $d\bar{r}$ een virtuele verplaatsing.

- netwerkelementen die niet-magnetisch materiaal voorstellen.

Bij de virtuele verplaatsing van een magnetisch netwerkelement vervormt het omliggend niet-magnetisch materiaal. De permeantie van de netwerkelementen die niet-magnetisch materiaal voorstellen kan dus afhangen van de positie \bar{r} van het netwerkelement waarop men de kracht berekent. Het Φ - ΔU -verband voor de niet-magnetische netwerkelementen wordt bijgevolg gegeven door:

$$\Phi_k = \mathcal{G}_k(\bar{r})\Delta U_k \quad (4.310)$$

met

$$k = k_1, \dots, k_2 \quad (4.311)$$

Alle netwerkelementen (en dus alle takken) samen worden als volgt genummerd:

$$l = 1, \dots, b \quad (4.312)$$

met b het aantal takken.

De arbeid dW_e geleverd door de spanningsbronnen wordt gegeven door:

$$dW_e = \sum_m I_m d\Psi_m \quad (4.313)$$

waarbij I_m de stroom en Ψ_m de gekoppelde flux van de verschillende stroomkringen voorstelt.

Elektrische stromen worden in een magnetisch netwerk weergegeven door de m.m.k.-bronnen. In Appendix G wordt aangetoond dat de som van de producten van de stroom en de gekoppelde flux in de stroomkringen gelijk is aan de som van de producten van het potentiaalverschil over en de flux door de m.m.k.-bronnen die deze stroomkringen voorstellen:

$$\sum_m I_m \Psi_m = \sum_{i=i_1}^{i_2} \mathcal{F}_i \Phi_i \quad (4.314)$$

waarbij, zoals reeds vermeld, het verband tussen de referentiezin voor \mathcal{F}_i en de positieve zin van de flux Φ_i bepaald is volgens het G.R.S..

Het principe van virtuele arbeid toegepast op een magnetisch netwerk kunnen we dus als volgt formuleren:

$$dW_e = \sum_{i=i_1}^{i_2} \mathcal{F}_i d\Phi_i = dW + \bar{F} \cdot d\bar{r} \quad (4.315)$$

Indien de flux door de m.m.k.-bronnen constant gehouden wordt ($d\Phi_i = 0$) is de arbeid geleverd door de spanningsbronnen dW_e gelijk aan nul. In dit geval kunnen we de magnetische kracht bepalen aan de hand van de variatie van de magnetische energie bij een virtuele verplaatsing:

$$\bar{F} = - \left. \frac{dW}{d\bar{r}} \right|_{\Phi_i = \text{cst.}} \quad (i = i_1, \dots, i_2) \quad (4.316)$$

Verder wordt de magnetische coënergie als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned} W_{co} &= \sum_i I_j \Psi_j - W \\ &= \sum_i \mathcal{F}_i \Phi_i - W \end{aligned} \quad (4.317)$$

Uit (4.315) en (4.317) volgt de uitdrukking voor de magnetische kracht op basis van de variatie van de coënergie bij een virtuele verplaatsing, ditmaal bij constant gehouden potentiaalverschil over de m.m.k.-bronnen :

$$\bar{F} = \left. \frac{dW_{co}}{d\bar{r}} \right|_{\mathcal{F}_i = \text{cst.}} \quad (i = i_1, \dots, i_2) \quad (4.318)$$

We zullen hier de kracht bepalen aan de hand van het principe van de virtuele arbeid bij constante flux door de m.m.k.-bronnen volgens (4.316). Daartoe dienen we de magnetische energie W uit te drukken in functie van de grootheden van het magnetisch netwerkmodel.

Hierbij maken we gebruik van de stelling van Tellegen. Als de potentiaalval en de fluxen voldoen aan respectievelijk de 'spanningswet' en de 'stroomwet' van Kirchhoff is de som van de producten van spanningsval en flux in de takken gelijk aan nul:

$$\sum_{l=1}^b \Delta U_l \Phi_l = 0 \quad (4.319)$$

Een bewijs van dit theorema vindt men bijvoorbeeld in [Willems].

Als we onderscheid maken tussen de drie soorten netwerkelementen bekommen we de volgende formulering van de stelling van Tellegen :

$$\sum_{i=i_1}^{i_2} \Delta U_i \Phi_i + \sum_{j=j_1}^{j_2} \Delta U_j \Phi_j + \sum_{k=k_1}^{k_2} \Delta U_k \Phi_k = 0 \quad (4.320)$$

of, gebruikmakend van (4.306) :

$$\sum_{i=i_1}^{i_2} \mathcal{F}_i \Phi_i = \sum_{j=j_1}^{j_2} \Delta U_j \Phi_j + \sum_{k=k_1}^{k_2} \Delta U_k \Phi_k \quad (4.321)$$

We beschouwen nu een variatie van de flux door en het potentiaalverschil over de m.m.k.-bronnen bij niet-bewegend materiaal ($d\bar{r} = 0$). De verandering van de magnetische coënergie in het magnetisch systeem wordt volgens de energiebalans (4.315) met $d\bar{r} = 0$, de definitie van de coënergie (4.317) en de stelling van Tellegen (4.321) gegeven door:

$$\begin{aligned} dW_{co} &= d \left(\sum_{i=i_1}^{i_2} \mathcal{F}_i \Phi_i \right) - dW \\ &= \sum_{i=i_1}^{i_2} (d(\mathcal{F}_i \Phi_i) - \mathcal{F}_i d\Phi_i) \\ &= \sum_{i=i_1}^{i_2} \Phi_i d\mathcal{F}_i \end{aligned} \quad (4.322)$$

$$= \sum_{j=j_1}^{j_2} \Phi_j d\Delta U_j + \sum_{k=k_1}^{k_2} \Phi_k d\Delta U_k \quad (4.323)$$

Gebruikmakend van (4.323) en van de constitutieve wetten voor de netwerkelementen (4.308) en (4.310) bekomt men de volgende uitdrukking voor de coënergie:

$$W_{co} = \sum_{j=j_1}^{j_2} \int_0^{\Delta U_j} \Phi_j d\Delta U_j + \sum_{k=k_1}^{k_2} \int_0^{\Delta U_k} \Phi_k d\Delta U_k \quad (4.324)$$

$$= \sum_{j=j_1}^{j_2} \int_0^{\Delta U_j} \mathcal{G}_j(\Delta U_j) \Delta U_j d\Delta U_j + \sum_{k=k_1}^{k_2} \int_0^{\Delta U_k} \mathcal{G}_k(\bar{r}) \Delta U_k d\Delta U_k \quad (4.325)$$

Uit (4.317) volgt verder de uitdrukking voor de magnetische energie W :

$$W = \sum_{i=i_1}^{i_2} \mathcal{F}_i \Phi_i - W_{co} \quad (4.326)$$

$$= - \sum_{i=i_1}^{i_2} \Delta U_i \Phi_i - \sum_{j=j_1}^{j_2} \int_0^{\Delta U_j} \Phi'_j d\Delta U'_j - \sum_{k=k_1}^{k_2} \int_0^{\Delta U_k} \Phi'_k d\Delta U'_k \quad (4.327)$$

$$= - \sum_{i=i_1}^{i_2} \Delta U_i \Phi_i - \sum_{j=j_1}^{j_2} \int_0^{\Delta U_j} \mathcal{G}_j (\Delta U'_j) \Delta U'_j d\Delta U'_j \\ - \sum_{k=k_1}^{k_2} \int_0^{\Delta U_k} \mathcal{G}_k (\bar{r}) \Delta U'_k d\Delta U'_k \quad (4.328)$$

Deze uitdrukking voor de energie is een functie van de potentiaalval over de takken ΔU_l en van de permeanties $\mathcal{G}(\bar{r})$ van de vervormbare niet-magnetische netwerkelementen. Teneinde de kracht \bar{F} te kunnen berekenen aan de hand van (4.316) wordt de flux \mathcal{F}_i door de m.m.k.-bronnen constant gehouden. De fluxen door de m.m.k.-bronnen worden verder als constanten beschouwd zonder dit telkens expliciet te vermelden. Bij een virtuele beweging van het materiaal, variëren de permeanties $\mathcal{G}(\bar{r})$ en de potentiaalvallen over de netwerkelementen ΔU_l zodat we de magnetische energie in functie van de plaatsvector \bar{r} van het bewegend netwerkelement kunnen schrijven als

$$W(\bar{r}) = W(\Delta U_l(\bar{r}), \mathcal{G}_k(\bar{r})) \quad (4.329)$$

Voor de berekening van de kracht volgens (4.316):

$$\bar{F} = - \frac{dW}{d\bar{r}} \quad (4.330)$$

moeten we rekening houden met het feit dat bij de virtuele beweging de fluxen en de potentiaalvallen blijven voldoen aan de wetten van Kirchhoff.

De 'spanningswet' van Kirchhoff is hierbij automatisch voldaan als we de potentiaalvallen over de takken uitdrukken in functie van de potentialen in de knopen. Zij n het aantal knopen van het magnetisch netwerk. Omdat de potentialen in de knopen slechts op een constante na bepaald zijn stellen we de potentiaal in knoop n gelijk aan nul, zodat de potentialen in de knopen 1 tot $n-1$ éénduidig bepaald zijn. We beschouwen nu de gereduceerde incidentiematrix $[A_{ml}]$ met $(n-1)$ rijen en b kolommen die als volgt gedefinieerd is:

$$\begin{aligned} A_{ml} &= 1 && \text{als knoop } m \text{ een eindpunt is van tak } l \text{ en tak } l \\ &&& \text{georiënteerd is van het knooppunt } m \text{ weg} \\ A_{ml} &= -1 && \text{als knoop } m \text{ een eindpunt is van tak } l \text{ en tak } l \\ &&& \text{georiënteerd is naar het knooppunt } m \text{ toe} \\ A_{ml} &= 0 && \text{knoop } m \text{ geen eindpunt van tak } l \text{ is} \end{aligned} \quad (4.331)$$

De spanningsvallen in de takken worden met behulp van de gereduceerde incidentiematrix als volgt uitgedrukt in functie van de knooppotentialen:

$$\Delta U_l = \sum_{m=1}^n A_{ml} U_m \quad ; \quad l = 1, \dots, b \quad (4.332)$$

De 'stroomwet' van Kirchhoff in de knopen kan vervolgens als volgt geformuleerd worden:

$$\sum_{l=1}^b A_{ml} \Phi_l = 0 \quad ; \quad m = 1, \dots, n - 1 \quad (4.333)$$

De magnetische energie in functie van \bar{r} kan nu als volgt uitgedrukt worden:

$$W(\bar{r}) = W(U_m(\bar{r}), \mathcal{G}_k(\bar{r})) \quad (4.334)$$

zodat de kracht \bar{F} bepaald wordt door:

$$\bar{F} = -\frac{dW}{d\bar{r}} \quad (4.335)$$

$$= -\sum_{m=1}^{n-1} \frac{\partial W}{\partial U_m} \frac{dU_m(\bar{r})}{d\bar{r}} - \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{G}_k(\bar{r})} \frac{d\mathcal{G}_k(\bar{r})}{d\bar{r}} \quad (4.336)$$

Uit de uitdrukking van de magnetische energie (4.327) en de 'stroomwet' van Kirchhoff (4.333) volgt dat de afgeleiden van de energie naar de knooppuntpotentialen gelijk zijn aan nul:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial U_m} &= -\sum_{l=1}^b \frac{\partial W}{\partial \Delta U_l} \frac{\partial \Delta U_l}{\partial U_m} \\ &= -\sum_{l=1}^b \frac{\partial W}{\partial \Delta U_l} A_{ml} \\ &= -\sum_{i=i_1}^{i_2} \Phi_i A_{mi} - \sum_{j=j_1}^{j_2} \Phi_j A_{mj} - \sum_{k=k_1}^{k_2} \Phi_k A_{mk} \\ &= -\sum_{l=1}^b A_{ml} \Phi_l \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.337)$$

De magnetische kracht op een magnetisch netwerkelement wordt volgens (4.336), (4.337) en (4.328) gegeven door:

$$\bar{F} = -\sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{G}_k} \frac{d\mathcal{G}_k(\bar{r})}{d\bar{r}}$$

$$= - \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}_k} \left(\int_0^{\Delta U_k} \mathcal{G}_k(\bar{r}) \Delta U'_k d\Delta U'_k \right) \frac{d\mathcal{G}_k(\bar{r})}{d\bar{r}} \quad (4.338)$$

$$= \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{1}{2} \frac{d\mathcal{G}_k(\bar{r})}{d\bar{r}} \Delta U_k^2 \quad (4.339)$$

We kunnen de magnetische langeafstandskrachtwerking op het magnetisch materiaal voorgesteld door een magnetisch netwerkelement volgens het principe van de virtuele arbeid dus als volgt bepalen:

$$\bar{F} = \left. \frac{dW}{d\bar{r}} \right|_{\Phi_i = \text{cst.}} \quad (4.340)$$

$$= \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{1}{2} \frac{d\mathcal{G}_k(\bar{r})}{d\bar{r}} \Delta U_k^2 \quad (4.341)$$

waarbij $\Phi_i, i = i_1, \dots, i_2$ de constant gehouden fluxen door de m.m.k.-bronnen zijn en $\mathcal{G}_k(\bar{r})$ en ΔU_k met $k = k_1, \dots, k_2$ respectievelijk de permeantie en de potentiaalval van de netwerkelementen die niet-magnetisch materiaal voorstellen en vervormen bij een virtuele beweging van het beschouwde magnetisch netwerkelement.

4.6.2 Toepassing op de magnetische krachtwerking in inductiemachines

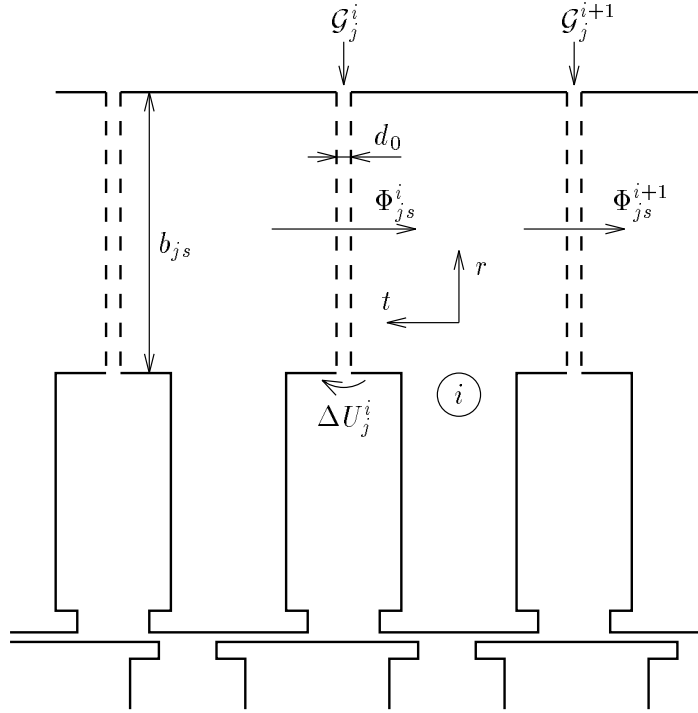
Om de magnetische krachtenverdeling in de stator voor te stellen verdelen we de stator in N_s sectoren elk bestaande uit een statortand en de helft van de twee aanliggende juksegmenten zoals voorgesteld in Figuur 4.19 en bepalen we de magnetische langeafstandskracht inwerkend op deze sectoren. Om de berekeningsmethode steunende op het principe van de virtuele arbeid zoals uiteengezet in de vorige paragraaf te kunnen toepassen, brengt men in het juk denkbeeldige sneden aan tussen de naburige sectoren met infinitesimale dikte d_0 en bestaande uit niet-magnetisch materiaal. Iedere statorsector is aldus van de rest van het magnetisch materiaal gescheiden door middel van een niet-magnetische middenstof, met name door de denkbeeldige sneden en de luchtspleet.

4.6.2.1 Radiale krachten

Voor het bepalen van de radiale krachtwerking op de statorsectoren beschouwen we de verplaatsing u_r volgens de r -richting, aangeduid in Figuur 4.19. De radiale kracht op een statorsector (in de positie $u_r = 0$) wordt nu volgens (4.341) bepaald aan de hand van de afgeleiden van de permeanties van de niet-magnetische middenstoffen naar de verplaatsing u_r .

Bij een radiale verplaatsing van een statorsector vertoont de permeantie van de ingevoerde denkbeeldige sneden een maximum in $u_r = 0$, zodat de afgeleide van deze permeantie naar u_r nul is voor $u_r = 0$. De radiale kracht wordt dus enkel bepaald door de variatie van de luchtspleetpermeantie.

Volgens (4.64) wordt de flux (per lengte-eenheid) die de i -de statortand verlaat en de luchtspleet



Figuur 4.19: Indeling van de stator in sectoren

oversteekt gegeven door:

$$\phi_{ls}^i(t) = R \int_{\frac{2\pi}{N_s}i - \frac{\pi}{N_s}}^{\frac{2\pi}{N_s}i + \frac{\pi}{N_s}} \lambda_{ls}(\theta, t) \lambda_{ss}(\theta) \lambda_{rs}(\theta, t) (U_{ss}(\theta, t) - U_{rs}(\theta, t)) d\theta \quad (4.342)$$

Bij een radiale verplaatsing van de i -de statorsector blijven de permeantie van het stator- en het rotoroppervlak λ_{ss} en λ_{rs} ongewijzigd. De luchtspleetpermeantie echter, die bij $u_r = 0$ gegeven wordt door (4.57) :

$$\lambda_{ls}(\theta, t) = \frac{\mu_0}{\delta_s(\theta, t)}, \quad (4.343)$$

wordt bij inachtneming van de radiale verplaatsing omgevormd tot:

$$\lambda_{ls}(\theta, t, u_r) = \frac{\mu_0}{\delta_s(\theta, t) + u_r} \quad (4.344)$$

De afgeleide naar u_r van de luchtspleetpermeantie wordt aldus gegeven door:

$$\frac{\partial \lambda_{ls}}{\partial u_r} = -\frac{\mu_0}{(\delta_s(\theta, t) + u_r)^2} \quad (4.345)$$

wat in de uitgangspositie $u_r = 0$ de volgende waarde oplevert:

$$\lambda'_{ls}(\theta, t) = \left. \frac{\partial \lambda_{ls}}{\partial u_r} \right|_{u_r=0} \quad (4.346)$$

$$= -\frac{\mu_0}{\delta_s(\theta, t)^2} \quad (4.347)$$

met

$$\delta_s(\theta, t) = \delta_0 + \Re(\bar{\varepsilon}_s e^{-j\theta}) + \Re(\bar{\varepsilon}_d e^{j(\Omega t - \theta)}) \quad (4.348)$$

De Fourier-ontbinding van λ'_{ls} kunnen we als volgt formuleren:

$$\lambda'_{ls}(\theta, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\lambda}'_{l_k} e^{j(\omega_{ls_k} t - \nu_{ls_k} \theta)} \quad (4.349)$$

met

$$(\omega_{ls_{-k}}, \nu_{ls_{-k}}) = -(\omega_{ls_k}, \nu_{ls_k}) \quad (4.350)$$

$$\bar{\lambda}'_{l_{-k}} = \bar{\lambda}'_{l_k}^* \quad (4.351)$$

waarbij de pulsatie en de orde van de componenten van λ'_{ls} dezelfde zijn als die van de componenten van λ_{ls} (4.61):

$$(\omega_{ls_k}, \nu_{ls_k}) = (e_d \Omega, e_s + e_d) \quad (4.352)$$

Toepassing van het principe van de virtuele arbeid (4.315) met de afgeleide van de luchtspleet-permeantie gegeven door (4.347) levert de volgende uitdrukking op voor de radiale kracht op de i -de statorsector per lengte-eenheid in de axiale richting :

$$f_r^i(t) = R \int_{\frac{2\pi}{N_s} i - \frac{\pi}{N_s}}^{\frac{2\pi}{N_s} i + \frac{\pi}{N_s}} \frac{1}{2} \lambda'_{ls}(\theta, t) \lambda_{ss}(\theta) \lambda_{rs}(\theta, t) \left(U_{ss}(\theta, t) - U_{rs}(\theta, t) \right)^2 d\theta \quad (4.353)$$

of, gebruikmakend van de definitie van de potentiaal van het statoroppervlak U_{ss} (4.52) :

$$\begin{aligned} f_r^i(t) &= \frac{1}{2} R \int_{\frac{2\pi}{N_s} i - \frac{\pi}{N_s}}^{\frac{2\pi}{N_s} i + \frac{\pi}{N_s}} \lambda'_{ls}(\theta, t) \lambda_{ss}(\theta) \lambda_{rs}(\theta, t) U_{ss}^2(t) d\theta \\ &\quad - U_{ts}^i(t) R \int_{\frac{2\pi}{N_s} i - \frac{\pi}{N_s}}^{\frac{2\pi}{N_s} i + \frac{\pi}{N_s}} \lambda'_{ls}(\theta, t) \lambda_{ss}(\theta) \lambda_{rs}(\theta, t) U_{rs}(\theta, t) d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2} R \int_{\frac{2\pi}{N_s} i - \frac{\pi}{N_s}}^{\frac{2\pi}{N_s} i + \frac{\pi}{N_s}} \lambda'_{ls}(\theta, t) \lambda_{ss}(\theta) \lambda_{rs}(\theta, t) U_{rs}^2(\theta, t) d\theta \end{aligned} \quad (4.354)$$

De radiale kracht per tandsector wordt als volgt in componenten opgedeeld:

$$F_r^i(t) = \sum_{k=1}^{N_f} \Re \left(\bar{F}_{r_k} e^{j(\omega_{f_k} t - \kappa_{f_k} \alpha_{s_i})} \right) \quad (4.355)$$

waarbij de pulsaties en de ordes voldoen aan:

$$\omega_{f_k} \geq 0 \text{ rad/s} \quad (4.356)$$

$$0 \leq \kappa_{f_k} \leq N_s - 1 \quad (4.357)$$

Uit de vergelijking tussen de uitdrukkingen voor de flux (4.342) en voor de radiale kracht (4.354) blijkt dat we voor bepaling van de componenten van de radiale kracht \bar{F}_{r_k} op basis van de componenten van de tandpotentiaal \bar{U}_{ts_l} en \bar{U}_{tr_l} kunnen gebruik maken van de resultaten van §4.3.4.3, waarin de componenten van de flux die de lichtspleet oversteeft bepaald worden i.f.v. de componenten van de tandpotentiaal.

De eerste term van het rechterlid van (4.354) kunnen we bijvoorbeeld berekenen zoals de flux veroorzaakt door de statortandpotentiaal, zoals uiteengezet in §4.3.4.3.2, waarbij we echter de componenten van U_{ts} vervangen door de componenten van U_{ts}^2 en de componenten van λ_{ls} door die van λ'_{ls} . Analoog kunnen we de derde term van (4.354) bepalen op basis van de resultaten van §4.3.4.3.2.

Om de werkwijze voor het bepalen van de componenten van de radiale krachten op basis van de componenten van de stator- en rotortandpotentiaal nader toe te lichten zullen we hier de tweede term van het rechterlid van (4.354) meer expliciet behandelen. We kunnen deze term als volgt noteren :

$$U_{ts}^i(t) \left(-R \int_{\frac{2\pi}{N_s} i - \frac{\pi}{N_s}}^{\frac{2\pi}{N_s} i + \frac{\pi}{N_s}} \lambda'_{ls}(\theta, t) \lambda_{ss}(\theta) \lambda_{rs}(\theta, t) U_{rs}(\theta, t) d\theta \right) = U_{ts}^i(t) \phi_{lsr}^i(t) \quad (4.358)$$

waarbij, volgens (4.342), $\phi_{lsr}^i(t)$ gelijk is aan de bijdrage van de rotorpotentiaal tot de statorflux ϕ_{ls} , waarbij echter λ_{ls} vervangen is door λ'_{ls} .

Voor de berekening van de totale radiale kracht op de statorsectoren definiëren we de grootheid Φ'_{lsr} als de integraal van ϕ'_{lsr} over de axiale lengte van de machine. De componenten $\bar{\Phi}'_{lsr_n}(\omega_n, \kappa_n)$ van $\Phi'_{lsr}(t)$ veroorzaakt door een bepaalde component $\bar{U}_{tr}(\omega_r, \kappa_r)$ van de rotortandpotentiaal, worden bijgevolg gegeven door de componenten van de bijdrage van deze rotorpotentiaalcomponent tot de statortandflux gegeven door (4.112), waarbij de factoren $\bar{\lambda}_{l_k}$ vervangen zijn door de corresponderende factoren $\bar{\lambda}'_{l_k}$:

$$(\omega_n, \kappa_n) = (\omega_r + (\kappa_r + mN_r)\Omega + \omega_{ls_k}, \kappa_r + mN_r + \nu_{ls_k}) \quad (4.359)$$

$$\bar{\Phi}'_{lsr_n} = -t_s l_a \Lambda_s(\kappa_r + mN_r + \nu_{ls_k}) k_s(\kappa_r + mN_r) \Lambda_r(\kappa_r + mN_r) \bar{\lambda}'_{l_k} \bar{U}_{tr} \quad (4.360)$$

met $m = -\infty, \dots, \infty$; $k = -\infty, \dots, \infty$.

Volgens (4.354) en (4.358) levert het product van de componenten van $\Phi'_{l'sr}$ met die van U_{ts} een reeks componenten van de radiale kracht op. Het product van de componenten (4.360) met een component $\bar{U}_{ts}(\omega_s, \kappa_s)$ van de statortandpotentialiaal levert bijgevolg de volgende reeks componenten $\bar{F}_{r_l}(\omega_l, \kappa_l)$ van de radiale kracht op de statorsectoren op:

$$(\omega_l, \kappa_l) = \begin{matrix} + \\ (-) \end{matrix} \left((\omega_n, \kappa_n + aN_s) \begin{matrix} + \\ (-) \end{matrix} (\omega_s, \kappa_s) \right) \quad (4.361)$$

$$\bar{F}_{ts_l} = \frac{1}{2} \left(\bar{\Phi}'_{l'sr_n} \bar{U}_{ts}^{(*)} \right)^{(*)} \quad (4.362)$$

waarbij men ervoor zorgt dat ω_l en κ_l voldoen aan de voorwaarden (4.356)-(4.357).

Op analoge wijze kan men de andere termen van (4.354) behandelen zodat we tenslotte de volgende uitdrukking voor de componenten van de radiale kracht kunnen opstellen:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{r_k} &= \sum_{l=1}^{N_{\phi_s}} \sum_{m=1}^{N_{\phi_s}} \bar{U}_{ts_l} \cdot \bar{P}_{ssklm} \cdot \bar{U}_{ts_m} \\ &+ \sum_{l=1}^{N_{\phi_s}} \sum_{m=1}^{N_{\phi_r}} \bar{U}_{ts_l} \cdot \bar{P}_{srklm} \cdot \bar{U}_{tr_m} \\ &+ \sum_{l=1}^{N_{\phi_r}} \sum_{m=1}^{N_{\phi_r}} \bar{U}_{tr_l} \cdot \bar{P}_{rrklm} \cdot \bar{U}_{tr_m} \end{aligned} \quad (4.363)$$

4.6.2.2 Tangentiale krachten

Bij een verplaatsing u_t van een statorsector in de tangentiale richting t , zoals aangeduid in Figuur 4.19, wijzigen zowel de (toegevoegde) permeanties in het juk als de permeantie tussen de stator- en rotortanden.

De permeantie \mathcal{G}_j^i van de snede aangebracht aan de linkerzijde van statorsector i wordt gegeven door :

$$\mathcal{G}_j^i = \frac{\mu_0 l_a b_{js}}{d} \quad (4.364)$$

waarbij de breedte van de snede d afhankelijk is van de tangentiale verplaatsing van de statorsector:

$$d = d_0 - u_t \quad (4.365)$$

In de uitgangspositie $u_t=0$ wordt de afgeleide van deze permeantie naar de tangentiale verplaatsing u_t aldus gegeven door:

$$\left. \frac{d\mathcal{G}_j^i}{du_t} \right|_{u_t=0} = \frac{\mu_0 l_a b_{js}}{d_0^2} \quad (4.366)$$

De potentiaalval over de aangebrachte snede wordt gegeven door:

$$\Delta U_j^i = \frac{\Phi_{js}^i}{\mathcal{G}_j^i} \quad (4.367)$$

$$= \frac{\Phi_{js}^i d_0}{\mu_0 l_a b_{js}} \quad (4.368)$$

zodat de bijdrage tot de tangentele kracht te wijten aan de variatie van \mathcal{G}_j^i volgens (4.341) gegeven wordt door:

$$F_t^i = \frac{1}{2} \frac{d\mathcal{G}_j^i}{du_t} (\Delta U_j^i)^2 \quad (4.369)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\mu_0 l_a b_{js}}{d_0^2} \left(\frac{\Phi_{js}^i d_0}{\mu_0 l_a b_{js}} \right)^2 \quad (4.370)$$

$$= \frac{1}{2\mu_0 l_a b_{js}} (\Phi_{js}^i)^2 \quad (4.371)$$

Aangezien de variatie van de permeantie van de snede aangebracht aan de rechterzijde gegeven wordt door:

$$\left. \frac{d\mathcal{G}_j^{i+1}}{du_t} \right|_{u_t=0} = -\frac{\mu_0 l_a b_{js}}{d_0^2} \quad (4.372)$$

is de tangentele kracht ten gevolge van de variatie van de permeanties van beide sneden gelijk aan:

$$F_t^i(t) = \frac{1}{2\mu_0 l_a b_{js}} \left((\Phi_{js}^i(t))^2 - (\Phi_{js}^{i+1}(t))^2 \right) \quad (4.373)$$

$$= \frac{1}{2\mu_0 l_a b_{js}} (\Phi_{js}^i(t) + \Phi_{js}^{i+1}(t)) (\Phi_{js}^i(t) - \Phi_{js}^{i+1}(t)) \quad (4.374)$$

waarbij de som en het verschil van de jukfluxen Φ_{js}^i en Φ_{js}^{i+1} als volgt in componenten ontbonden worden:

$$\Phi_{js}^i(t) + \Phi_{js}^{i+1}(t) = \sum_{k=1}^{N_{\phi_s}} \Re \left((1 + e^{-j\kappa_{\phi_s k} \alpha_s}) \bar{\Phi}_{jsk} e^{j(\omega_{\phi_s k} t - \kappa_{\phi_s k} \alpha_s i)} \right) \quad (4.375)$$

en

$$\Phi_{js}^i(t) - \Phi_{js}^{i+1}(t) = \sum_{k=1}^{N_{\phi_s}} \Re \left((1 - e^{-j\kappa_{\phi_s k} \alpha_s}) \bar{\Phi}_{jsk} e^{j(\omega_{\phi_s k} t - \kappa_{\phi_s k} \alpha_s i)} \right) \quad (4.376)$$

Het product van een component k van $\Phi_{js}^i(t) + \Phi_{js}^{i+1}(t)$ en een component l van $\Phi_{js}^i(t) - \Phi_{js}^{i+1}(t)$ levert bijgevolg de volgende componenten $\bar{F}_{t_n}(\omega_n, \kappa_n)$ van de tangentele kracht op:

$$(\omega_n, \kappa_n) = \begin{matrix} + \\ (-) \end{matrix} \left((\omega_{\phi_s k}, \kappa_{\phi_s k} + aN_s) \begin{matrix} + \\ (-) \end{matrix} (\omega_{\phi_s l}, \kappa_{\phi_s l}) \right) \quad (4.377)$$

$$\bar{F}_{t_n} = \frac{1}{4\mu_0 l_a b_{js}} \left((1 + e^{-j\kappa_{\phi_s k} \alpha_s}) \bar{\Phi}_{jsk} \left((1 - e^{-j\kappa_{\phi_s l} \alpha_s}) \bar{\Phi}_{jsl} \right)^{(*)} \right)^{(*)} \quad (4.378)$$

waarbij (ω_n, κ_n) voldoen aan (4.356)-(4.357).

De componenten van de tangentiale kracht te wijten aan de variatie van de permeanties in het juk kunnen bijgevolg als volgt geformuleerd worden:

$$\bar{F}_{t_k} = \sum_{l=1}^{N_{\phi_s}} \sum_{m=1}^{N_{\phi_s}} \bar{\Phi}_{j_{s_l}} \cdot \bar{Q}_{klm} \cdot \bar{\Phi}_{j_{s_m}} \quad (4.379)$$

waarbij de tensoren \bar{Q}_{klm} bepaald worden aan de hand van (4.377)-(4.378).

Voor het bepalen van de tangentiale kracht ten gevolge van de variatie van de permeantie tussen de stator- en rotortanden bij een tangentiale verplaatsing u_t van een statorsector kunnen we te werk gaan zoals in vorige paragraaf voor het bepalen van de radiale krachten.

We beschouwen nu een virtuele tangentiale verplaatsing u_t van de i -de statorsector. Voor een waarnemer die met de statorsector meebeweegt beweegt het rotoroppervlak (in tegenovergestelde richting) zodat de de permeantie van het rotoroppervlak λ_{rs} varieert met u_t . Bij $u_t = 0$ wordt $\lambda_{rs}(\theta, t)$ gegeven door (4.67):

$$\lambda_{rs}(\theta, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{r_k} e^{j(kN_r\Omega t - kN_r\theta)} \quad (4.380)$$

zodat de rotorpermeantie ter hoogte van de bewegende statorsector en ten opzichte van een waarnemer die met de statorsector meebeweegt, bij een verplaatsing u_t gegeven wordt door:

$$\lambda_{rs}(\theta, t, u_t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{r_k} e^{j(kN_r\Omega t - kN_r(\theta - \frac{u_t}{R}))} \quad (4.381)$$

De afgeleide van de rotorpermeantie λ_{rs} naar de verplaatsing u_t in de uitgangspositie $u_t = 0$ wordt aldus gegeven door:

$$\lambda'_{rs}(\theta, t) = \left. \frac{\partial \lambda_{rs}(\theta, t, u_t)}{\partial u_t} \right|_{u_t=0} \quad (4.382)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} j \frac{kN_r}{R} \lambda_{r_k} e^{j(kN_r\Omega t - kN_r\theta)} \quad (4.383)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda'_{r_k} e^{j(kN_r\Omega t - kN_r\theta)} \quad (4.384)$$

Analoog aan (4.354), kunnen we bijgevolg het deel van de tangentiale kracht per lengte-eenheid op de i -de statorsector dat te wijten is aan de variatie van de permeantie van het rotoroppervlak, als volgt bepalen:

$$f_t^i(t) = R \int_{\frac{2\pi}{N_s}i - \frac{\pi}{N_s}}^{\frac{2\pi}{N_s}i + \frac{\pi}{N_s}} \frac{1}{2} \lambda_{ls}(\theta, t) \lambda_{ss}(\theta) \lambda'_{rs}(\theta, t) (U_{ss}(\theta, t) - U_{rs}(\theta, t))^2 d\theta \quad (4.385)$$

$$= \frac{1}{2} R \int_{\frac{2\pi}{N_s} i - \frac{\pi}{N_s}}^{\frac{2\pi}{N_s} i + \frac{\pi}{N_s}} \lambda_{ls}(\theta, t) \lambda_{ss}(\theta) \lambda'_{rs}(\theta, t) U_{ss}^2(\theta, t) d\theta \quad (4.386)$$

$$- U_{ss}^i(t) R \int_{\frac{2\pi}{N_s} i - \frac{\pi}{N_s}}^{\frac{2\pi}{N_s} i + \frac{\pi}{N_s}} \lambda_{ls}(\theta, t) \lambda_{ss}(\theta) \lambda'_{rs}(\theta, t) U_{rs}(\theta, t) d\theta \quad (4.387)$$

$$+ \frac{1}{2} R \int_{\frac{2\pi}{N_s} i - \frac{\pi}{N_s}}^{\frac{2\pi}{N_s} i + \frac{\pi}{N_s}} \lambda_{ls}(\theta, t) \lambda_{ss}(\theta) \lambda'_{rs}(\theta, t) U_{ss}^2(\theta, t) d\theta \quad (4.388)$$

De componenten van dit deel van de tangentiale kracht kunnen dus op analoge wijze als uiteengezet in vorige paragraaf bepaald worden op basis van de componenten van de stator- en rotor-tandpotentialiaal. We kunnen hierbij opnieuw gebruik maken van de resultaten van §4.3.4.3, waarbij de factoren λ_{r_k} vervangen worden door λ'_{r_k} . Samen met de componenten van de tangentiale kracht door de variatie van de jukpermeanties \mathcal{G}_j^i gegeven door (4.379), levert dit de volgende uitdrukking voor de componenten van de totale tangentiale kracht op :

$$\bar{F}_{t_k} = \sum_{l=1}^{N_{\phi_s}} \sum_{m=1}^{N_{\phi_s}} \bar{\Phi}_{js_l} \cdot \bar{Q}_{klm} \cdot \bar{\Phi}_{js_m} \quad (4.389)$$

$$+ \sum_{l=1}^{N_{\phi_s}} \sum_{m=1}^{N_{\phi_s}} \bar{U}_{ts_l} \cdot \bar{R}_{ss_{klm}} \cdot \bar{U}_{ts_m}$$

$$+ \sum_{l=1}^{N_{\phi_s}} \sum_{m=1}^{N_{\phi_r}} \bar{U}_{ts_l} \cdot \bar{R}_{sr_{klm}} \cdot \bar{U}_{tr_m} \quad (4.390)$$

$$+ \sum_{l=1}^{N_{\phi_r}} \sum_{m=1}^{N_{\phi_r}} \bar{U}_{tr_l} \cdot \bar{R}_{rr_{klm}} \cdot \bar{U}_{tr_m}$$

4.7 Pulsaties en ordes

In deze paragraaf wordt uiteengezet hoe de pulsaties en de ordes van de verschillende grootheden van het gekoppeld magnetisch-elektrisch netwerkmodel worden bepaald.

Met name de volgende lijsten worden opgesteld:

1. de componenten van de statorfluxen, -potentialen en -potentialaaverschillen Φ_{ts} , Φ_{js} , Φ_{ls} , $\Phi_{\sigma s}$, U_{ts} , ΔU_{ts} , U_{js} , ΔU_{js} en \mathcal{F}_s :

$$(\omega_{\phi_{s_k}}, \kappa_{\phi_{s_k}}) \quad ; \quad k = 1, \dots, N_{\phi_s} \quad (4.391)$$

2. de componenten van de rotorfluxen, -potentialen en -potentialaaverschillen Φ_{tr} , Φ_{jr} , Φ_{lr} , $\Phi_{\sigma r}$, U_{tr} , ΔU_{tr} , U_{jr} , ΔU_{jr} en \mathcal{F}_r :

$$(\omega_{\phi_{r_k}}, \kappa_{\phi_{r_k}}) \quad ; \quad k = 1, \dots, N_{\phi_r} \quad (4.392)$$

3. de componenten van de statorreluctanties en -permeanties $\mathcal{R}_{ts}, \mathcal{R}_{js}, \mathcal{G}_{\sigma s}$:

$$(\omega_{\mathcal{R}s_k}, \kappa_{\mathcal{R}s_k}) \quad ; \quad k = 0, \dots, N_{\mathcal{R}s} \quad (4.393)$$

4. de componenten van de rotorreluctanties en -permeanties $\mathcal{R}_{tr}, \mathcal{R}_{jr}, \mathcal{G}_{\sigma r}$:

$$(\omega_{\mathcal{R}r_k}, \kappa_{\mathcal{R}r_k}) \quad ; \quad k = 0, \dots, N_{\mathcal{R}r} \quad (4.394)$$

5. de componenten van de statorstroom I_s :

$$(\omega_{is_k}, \kappa_{is_k}) \quad ; \quad k = 1, \dots, N_{is} \quad (4.395)$$

6. de componenten van de rotorstroom I_r :

$$(\omega_{ir_k}, \kappa_{ir_k}) \quad ; \quad k = 1, \dots, N_{ir} \quad (4.396)$$

7. de componenten van de magnetische kracht op de statorsectoren:

$$(\omega_{f_k}, \kappa_{f_k}) \quad ; \quad k = 1, \dots, N_f \quad (4.397)$$

We bepalen hiertoe eerst de algemene vorm van de componenten van de verschillende grootheden aan de hand van een aantal parameters (de gehele getallen h, a, b, e_s, e_d en v , zie verder) die van $-\infty$ tot $+\infty$ kunnen variëren zonder hierbij specifieke voorwaarden aan de componenten op te leggen. We laten dus zowel positieve als negatieve pulsaties toe en de waarden die de ordes kunnen aannemen zijn onbeperkt.

Nadien beschouwen we slechts een beperkt aantal waarden voor de parameters en vormen met behulp van de uitdrukkingen voor equivalente componenten de gevonden componenten om tot componenten die wel beantwoorden aan de gestelde voorwaarden.

Voor het opstellen van de lijsten gaan we uit van de componenten van de aangelegde spanning:

$$V_f^k(t) = \sum_l \Re \left(\bar{V}_{f_l} e^{j(\omega_{v_l} t - \kappa_{v_l} \frac{2\pi}{3} k)} \right) \quad ; \quad k = 0, 1, 2 \quad (4.398)$$

Om de gedachten te vestigen, beschouwen we hier het geval van een inductiemachine gevoed door een inverter met synchrone PWM (Pulse Width Modulation). In dit geval zijn de frequenties van de aangelegde spanning veelvouden van de fundamentele frequentie f_0 . De componenten van de aangelegde spanning worden hierbij gegeven door:

$$\omega_{v_l} = (1 + 6h) \omega_0 \quad ; \quad h = -\infty, \dots, \infty \quad (4.399)$$

$$\kappa_{v_l} = 1 \quad (4.400)$$

Wat de statorwikkeling betreft, beschouwen we, bij wijze van voorbeeld, het wikkelschema met parallelschakeling van de spoelgroepen zonder equipotentiaalverbindingen, zoals besproken in §4.4.1.2.2. Een component van de aangelegde spanning met orde $\kappa_{v_l} = 1$ komt hierbij overeen met een stroomcomponent $\kappa_{is_k} = N_p$.

De statorstroomcomponenten die rechtstreeks afgeleid zijn van de aangelegde spanning worden dus gegeven door:

$$\omega_{s_k} = (1 + 6h) \omega_0 \quad (4.401)$$

$$\kappa_{s_k} = N_p \quad (4.402)$$

De componenten van de m.m.k.-bronnen die overeenstemmen met deze stroomcomponenten worden volgens (4.242)-(4.244) gegeven door:

$$\omega_{\phi_{s_l}} = \omega_{i_{s_k}} = (1 + 6h) \omega_0 \quad (4.403)$$

$$\kappa_{\phi_{s_l}} = N_p + 3aN_p \quad (4.404)$$

Wegens het feit dat de ordes van de m.m.k.-bronnen $\kappa_{\phi_{s_l}}$ geen even veelvoud van N_p kunnen zijn (4.244), beantwoorden de componenten van de stator-m.m.k.-bronnen aan de volgende uitdrukkingen:

$$\omega_{\phi_{s_l}} = (1 + 6h) \omega_0 \quad (4.405)$$

$$\kappa_{\phi_{s_l}} = (1 + 6a) N_p \quad (4.406)$$

Indien we voorlopig de potentiaalval in het stator- en het rotorijzer niet in rekening brengen, is het spanningsverschil over de m.m.k.-bronnen gelijk aan de potentiaalval over de luchtspleet.

Het luchtspleetveld $B(\theta, t)$ kan volgens (4.62) beschreven worden als het product van de potentiaalval over de luchtspleet en de permeantie tussen de stator- en de rotortanden bestaande uit de luchtspleetpermeantie $\lambda_{ls}(\theta, t)$ (4.58)-(4.61), de permeantie van het statoroppervlak λ_{ss} (4.65) en de permeantie van het rotoroppervlak λ_{rs} (4.67).

Uit de algemene vorm van de componenten van de stator-m.m.k.-bronnen (4.405)-(4.406) en van de componenten van de verschillende permeanties (4.61), (4.65) en (4.67) volgt de volgende uitdrukking voor de componenten $(\omega_{bs_n}, \kappa_{bs_n})$ van het luchtspleetveld opgewekt door de statorstroomcomponenten (4.401)-(4.402):

$$\omega_{bs_m} = (1 + 6h) \omega_0 + (bN_r + e_d) \Omega \quad (4.407)$$

$$\nu_{bs_m} = (1 + 6a) N_p + bN_r + e_s + e_d \quad (4.408)$$

De statortandfluxen die met deze componenten van het luchtspleetveld overeenkomen induceren een (in principe oneindige) reeks spanningscomponenten in de statorwikkeling. De statorstroomcomponenten die hierdoor ontstaan wekken op hun beurt fluxcomponenten op die (eventueel) de oorspronkelijke reeks componenten van het luchtspleetveld (4.407)-(4.408) uitbreiden. Hierbij moeten we onderscheid maken tussen de luchtspleetcomponenten naargelang hun orde ν_{bs_m} al dan niet een veelvoud van N_p is:

- Als de orde ν_{bs_m} (4.408) een N_p -voud is zal deze fluxcomponent enkel een spanning induceren als het een oneven N_p -voud betreft, cf. (4.252). De ordes $\kappa_{\phi_{s_l}}$ van de m.m.k.-componenten

van de stromen opgewekt door deze fluxcomponenten zijn dan, wegens (4.244), ook oneven veelvoud van N_p nl.

$$\kappa_{\phi_{sl}} = \nu_{bs_m} + 6aN_p \quad (4.409)$$

Deze m.m.k.-bronnen wekken luchtspleetvelden op die terug voldoen aan (4.407)-(4.408). Luchtspleetvelden met ordes die een N_p -voud zijn brengen dus via de spanningen geïnduceerd in de statorwikkeling geen 'nieuwe' componenten van het luchtspleetveld aan.

- Als de orde ν_{bs_m} geen N_p -voud is, worden de ordes van de m.m.k.-bronnen horende bij de opgewekte stromen gegeven door:

$$\kappa_{\phi_{sl}} = \nu_{bs_m} + 3aN_p \quad (4.410)$$

De algemene vorm van de luchtspleetcomponenten (4.407)-(4.408) wordt dus uitgebreid tot :

$$\omega_{bs_m} = (1 + 6h) \omega_0 + (bN_r + e_d) \Omega \quad (4.411)$$

$$\nu_{bs_m} = (1 + 3a) N_p + bN_r + e_s + e_d \quad (4.412)$$

Deze uitbreiding geldt alleen indien er luchtspleetvelden kunnen voorkomen met ordes die geen veelvoud zijn van het aantal poolparen N_p . Dit is het geval indien het aantal rotorgleuven N_r geen N_p -voud is en/of men statische en/of dynamische excentriciteit van de rotor in rekening brengt.

De componenten van het luchtspleetveld, zonder evenwel rekening te houden met verzadiging, kunnen we bijgevolg als volgt noteren:

$$\omega_{bs_m} = (1 + 6h) \omega_0 + (bN_r + e_d) \Omega \quad (4.413)$$

$$\nu_{bs_m} = (1 + 3pa) N_p + bN_r + e_s + e_d \quad (4.414)$$

met

- $p = 1$ als één of verschillende van de volgende voorwaarden is voldaan:
 1. N_r is geen veelvoud van N_p
 2. statische excentriciteit wordt in rekening gebracht (e_s)
 3. dynamische excentriciteit wordt in rekening gebracht (e_d)
- $p = 2$ in alle andere gevallen

Voor de andere types wikkelingen die hoger werden behandeld, namelijk bij de parallelschakeling van de spoelgroepen met equipotentiaalverbindingen en bij serieschakeling van de spoelgroepen, is p steeds gelijk aan 2. Dit volgt rechtstreeks uit het verband tussen de ordes van de fluxcomponenten en de ordes van de m.m.k.-bronnen en de geïnduceerde spanningen, gegeven door (4.217) en (4.220) voor de parallelschakeling met equipotentiaalverbindingen en door (4.274) en (4.283) voor de serieschakeling.

Aangezien de reluctiviteit van het stator- en rotorijzer een even functie is van de magnetische inductie B kunnen we de reluctanties van het magnetisch netwerk schrijven als een functie van het kwadraat van de flux die erdoor vloeit. De pulsaties en ordes van de reluctanties hebben bijgevolg dezelfde vorm als de pulsaties en ordes van het kwadraat van de flux. Het product van twee componenten (ω_1, κ_1) en (ω_2, κ_2) levert telkens twee componenten op nl. de som en het verschil van de componenten:

$$(\omega_1, \kappa_1) + (\omega_2, \kappa_2) \quad (4.415)$$

en

$$(\omega_1, \kappa_1) - (\omega_2, \kappa_2) \quad (4.416)$$

zodat de vorm van de fluxcomponenten (4.413)-(4.414) leidt tot de volgende algemene vorm van de componenten van het kwadraat van de flux en dus van de reluctanties :

$$\omega_{\mathcal{R}S_k} = (6h + 2v) \omega_0 + (bN_r + e_d) \Omega \quad (4.417)$$

$$\kappa_{\mathcal{R}S_k} = (3pa + 2v) N_p + bN_r + e_s + e_d \quad (4.418)$$

Door de potentiaalval over de reluctanties, nl. het product van de flux en de reluctantie, in rekening te brengen, bekomen we tenslotte de algemene vorm van de fluxcomponenten:

$$\omega_{\phi S_l} = (1 + 6h + 2v) \omega_0 + (bN_r + e_d) \Omega \quad (4.419)$$

$$\kappa_{\phi S_l} = (1 + 3pa + 2v) N_p + bN_r + e_s + e_d \quad (4.420)$$

Voor het bepalen van de algemene vorm van de componenten van de rotorgrootheden nemen we de componenten van het luchtspleetveld, zoals waargenomen door een waarnemer vast aan de stator, als uitgangspunt:

$$\omega_{bS_m} = (1 + 6h + 2v) \omega_0 + (bN_r + e_d) \Omega \quad (4.421)$$

$$\nu_{bS_m} = (1 + 3pa + 2v) N_p + bN_r + e_s + e_d \quad (4.422)$$

Een waarnemer meedraaiend met de rotor neemt hierbij de volgende pulsaties en ordes van het luchtspleetveld waar:

$$\omega_{br_m} = \omega_{bS_m} - \nu_{bS_m} \quad (4.423)$$

$$= (1 + 6h + 2v) \omega_0 - [(1 + 3pa) N_p + e_s] \Omega \quad (4.424)$$

$$\nu_{br_m} = \nu_{bS_m} \quad (4.425)$$

$$= (1 + 3pa + 2v) N_p + bN_r + e_s + e_d \quad (4.426)$$

De componenten van de rotorfluxen worden bijgevolg gegeven door de volgende algemene uitdrukking:

$$\omega_{\phi r_n} = \omega_{ir_n} = (1 + 6h) \omega_0 - [(1 + 3pa) N_p + e_s] \Omega \quad (4.427)$$

$$\kappa_{\phi r_n} = \kappa_{ir_n} = (1 + 3pa) N_p + bN_r + e_s + e_d \quad (4.428)$$

terwijl de componenten van de rotorreluctanties beantwoorden aan de volgende vorm:

$$\omega_{\mathcal{R}S_k} = (6h + 2v)\omega_0 + (bN_r + e_d)\Omega \quad (4.429)$$

$$\kappa_{\mathcal{R}S_k} = (3pa + 2v)N_p + bN_r + e_s + e_d \quad (4.430)$$

Tenslotte bepalen we de algemene vorm van de componenten van de magnetische kracht die op de statorsectoren inwerkt. Uit de berekeningsmethode uiteengezet in §4.6.2 blijkt dat krachten kwadratische functies van de tandpotentialen en de jukfluxen zijn zodat de componenten van de krachten aan dezelfde algemene vorm als de reluctanties voldoen.

Voor het opstellen van de bovenvermelde lijsten beschouwen we een beperkt bereik van de parameters h , a , b , e_s , e_d en v :

$$-h_{\max} \leq h \leq h_{\max} \quad (4.431)$$

$$-a_{\max} \leq a \leq a_{\max} \quad (4.432)$$

$$-b_{\max} \leq b \leq b_{\max} \quad (4.433)$$

$$-e_{s\max} \leq e_s \leq e_{s\max} \quad (4.434)$$

$$-e_{d\max} \leq e_d \leq e_{d\max} \quad (4.435)$$

$$-v_{\max} \leq v \leq v_{\max} \quad (4.436)$$

We beschouwen dan alle componenten van de flux en de reluctanties van stator en rotor, gegeven door respectievelijk (4.419)-(4.420), (4.418)-(4.418), (4.427)-(4.428) en (4.430)-(4.430) voor het gegeven bereik van de parameters. Iedere bekomen component wordt dan met behulp van de uitdrukking voor equivalente componenten (4.16) omgevormd tot een component die voldoet aan de gestelde eisen (4.17)-(4.19) en opgenomen in de betreffende lijst indien de component hierin nog niet voorkomt.

Met behulp van de relaties tussen de componenten van de statortandfluxen en de componenten van de geïnduceerde spanningen in de statorwikkeling, die naargelang het type wikkeling gegeven worden door (4.219)-(4.220), (4.250)-(4.252) en (4.282)-(4.283), worden de componenten van de statorstroom afgeleid van de statorfluxcomponenten. Hierbij wordt tevens rekening gehouden met de voorwaarden die aan de stroomcomponenten worden gesteld, die respectievelijk gegeven worden door (4.213)-(4.214), (4.229)-(4.230) en (4.260)-(4.261). Bovendien moeten in bepaalde gevallen stroomcomponenten worden uitgesloten, zoals de componenten die overeenkomen met een homopolaire stroom bij een niet-verbonden sterschakeling.

De componenten van de rotorstroom zijn gelijk aan deze van de rotorflux, waarbij echter de componenten met pulsatie gelijk aan nul worden uitgesloten.

Tenslotte wordt een lijst opgesteld van de componenten van de magnetische kracht die men wenst te berekenen. Zoals reeds vermeld voldoen de krachtcomponenten aan de algemene vorm van de componenten van de statorreluctantie (4.418)-(4.418). Bij het opstellen van de lijst van de krachtcomponenten kan men zich beperken tot het frequentiebereik en ordebereik dat men wenst te analyseren. Voor het berekenen van de magnetische krachten met het oog op de studie van geluidsproblemen bij inductiemachines kan men zich beperken tot de hoorbare frequenties en, zeker voor kleinere machines, tot de lagere ordes, bijvoorbeeld tot vierde orde. De mechanische

stijfheid van de machine neemt immers sterk toe voor grotere ordes zodat ze van weinig belang zijn voor de productie van trillingen en geluid bij kleinere machines.

4.8 Vergelijking met andere berekeningsmethodes

In de hierboven beschreven berekeningsmethode kunnen de verschillende factoren die de frequenties en de ordes van de magnetische krachten en bijgevolg het frequentiespectrum van het geluid en de trillingen bepalen in rekening worden gebracht. Ten eerste wordt het luchtspleetveld beschreven aan de hand van de magnetische scalaire potentiaal van de stator- en rotortanden en van de permeantie tussen de stator- en rotortanden die bepaald wordt door de permeantie van het stator- en rotoroppervlak en de permeantie van de luchtspleet. Op deze manier worden het gleueffect en eventuele statische en dynamische excentriciteit in rekening gebracht. Verder wordt door de modellering van het stator- en rotorblik door middel van niet-lineaire reluctanties het effect van de verzadiging weergegeven. De beschrijving van de stroomverdeling door middel van discrete m.m.k.-bronnen geeft weer dat de stroomvoerende geleiders in gleuven ondergebracht zijn zodat, om het in de terminologie van de draaiveldtheorie uit te drukken, de m.m.k.-harmonischen in rekening worden gebracht. Via de brontermen van het gekoppeld magnetisch-elektrisch systeem, nl. de componenten van de aangelegde spanning, worden tenslotte ook de spanningsharmonischen bij invertorvoeding in het model geïntroduceerd.

Door de rechtstreekse koppeling van de magnetische en de elektrische netwerkvergelijkingen wordt de wisselwerking tussen beide systemen volledig in rekening gebracht. Enerzijds worden de geïnduceerde spanningen in de statorwikkeling en in de rotorkooi bepaald op basis van alle fluxcomponenten. Anderzijds wordt iedere stroomcomponent in het magnetisch netwerk weergegeven door middel van de componenten van de m.m.k.-bronnen die ermee overeenstemmen. Dit heeft als gevolg dat voor iedere fluxcomponent de eventuele demping door de statorwikkeling of door de rotorkooi in het model vervat is. De demping van de fluxcomponenten door de statorwikkeling wordt in grote mate bepaald door de schakeling van de statorspoelen. Bijvoorbeeld worden bij serieschakeling van de spoelgroepen van de fasen enkel de fluxcomponenten met een orde die een veelvoud van N_p is gedempt omdat enkel deze fluxcomponenten spanningen induceren in de fasewikkelingen.

Ook de methode beschreven in [Vandeveld 94b], steunend op de draaiveldtheorie, vertoont beide eigenschappen, nl. het in rekening brengen van de verschillende factoren die het frequentiespectrum van het geluid bepalen en de volledige koppeling tussen de magnetische en elektrische systemen.

Bij de meeste methodes beschreven in de literatuur wordt slechts rekening gehouden met een aantal factoren die van belang zijn voor de geluidsproductie en is de koppeling tussen de elektrische en de magnetische systemen slechts gedeeltelijk. We kunnen dit illustreren aan de hand van enkele voorbeelden.

In [Verma 90, Verma 94] wordt een methode beschreven die steunt op de draaiveldtheorie en die als volgt kan samengevat worden. Eerst worden de stromen bepaald aan de hand van een aantal spanningsvergelijkingen, volgens een methode uiteengezet in [Oberretl 65]. Hierbij wordt geen rekening gehouden met verzadiging en worden stator en rotor als glad beschouwd (geen gleueffect). Het luchtspleetveld wordt aldus enkel bepaald door de m.m.k.-golven van stator en rotor. Wel wordt wel de zgn. meervoudige ankerreactie beschouwd, d.i. de reactie van de rotor op de

ruimteharmonischen van de velden opgewekt door de stator en omgekeerd. In deze stap van de berekeningsmethode is het elektrisch en magnetisch systeem volledig gekoppeld. Verder worden het gleueffect en verzadiging gemodelleerd aan de hand van permeantiegolven. Het luchtspleetveld wordt aldus bekomen door het vermenigvuldigen van de m.m.k.-golven, die corresponderen met de eerder berekende stromen, met de permeantiegolven. Het resulterende luchtspleetveld bevat hierdoor een reeks componenten die bij het opstellen van de spanningsvergelijkingen voor de berekening van de stromen niet voorkomen omdat hierbij enkel met de m.m.k.-harmonischen wordt rekening gehouden. De spanningen die deze bijkomende veldcomponenten induceren in stator en rotor worden niet in rekening gebracht. De demping van de luchtspleetvelden te wijten aan de permeantiegolven is dus niet opgenomen in deze berekeningsmethode zodat de koppeling tussen het magnetisch en het elektrisch systeem dus onvolledig is. Verder wordt enkel sinusoidale voeding beschouwd en wordt het effect van rotoexcentriciteit niet in de berekeningsmethode opgenomen.

In [Bolte 90] wordt het geluid van invertorgevoede inductiemachines in functie van de voedingsfrequentie behandeld. Hierbij wordt enkel rekening gehouden met het gleueffect van de stator. Andere factoren als rotorpleueffect, excentriciteit en verzadiging worden niet beschouwd. Verder worden enkel statorstromen met de fundamentele frequentie en rotorstromen met slipfrequentie. De reactie van de rotor op de ruimteharmonischen te wijten aan de m.m.k.-harmonischen en aan het gleueffect van de stator wordt dus niet in rekening gebracht.

Bij berekeningsmethodes die specifiek bedoeld zijn voor de analyse van het geluid bij invertorgevoede inductiemachines wordt dikwijls enkel het effect van de harmonischen in de voedingsspanning en in de statorstroom behandeld. Een voorbeeld hiervan is de methode beschreven in [Verdyck 93] die gebruik maakt van een eindige-elementenmodellering en toegepast kan worden op verschillende machinetypes. Hierbij wordt het veld opgedeeld in het hoofdveld dat opgewekt wordt door de fundamentele stroom en dat de verzadigingstoestand van de machine bepaalt, en de velden ten gevolge van de harmonische stromen die berekend worden aan de hand van een gelineariseerd magnetisch model. De fundamentele stroom en de harmonische stromen vormen het uitgangspunt van een magnetisch-mechanisch model dat steunt op de techniek van de modale analyse.

Ook in [Yacamini 95] concentreert men zich op de invloed van de harmonische inhoud van de voeding op het geluid en de trillingen in inductiemachines. Voor de ruimtelijke beschrijving van het luchtspleetveld maakt men hierbij gebruik van de m.m.k.- en permeantiegolven zoals in de draaiveldtheorie terwijl het tijdsverloop van de velden en de krachten in het tijdsdomein worden berekend. Bij deze methode worden de m.m.k.-harmonischen en het gleueffect in rekening gebracht. Bij de berekening van de geïnduceerde spanningen in de statorwikkeling wordt echter geen rekening gehouden met de ruimteharmonischen van het veld opgewekt door de rotorstromen en het rotorpleueffect. Omgekeerd worden bij de berekening van de rotorstromen de ruimteharmonischen van de stator-m.m.k. niet beschouwd. De koppeling tussen het magnetische en het elektrisch systeem is bijgevolg onvolledig.

4.9 Besluit

De in dit werk ontwikkelde berekeningsmethode is niet toegespitst op één welbepaalde factor bij de geluidsproductie, maar tracht een zo volledig mogelijk beeld van de magnetische krachtwerking in inductiemachines te schetsen waarbij de verschillende factoren terzelfdertijd in rekening worden gebracht. Uit de resultaten van volgend hoofdstuk zal immers blijken dat bepaalde frequenties die

in het frequentiespectrum van het geluid zeer nadrukkelijk voorkomen slechts kunnen verklaard worden als men verschillende effecten zoals gleueffect en excentriciteit tesamen in rekening brengt. Daarnaast kan men ook eventueel de invloed van één bepaalde factor apart bestuderen, bijvoorbeeld de harmonischen van de aangelegde spanning bij invertorvoeding. Bij het opstellen van de lijsten met componenten van de magnetische en elektrische grootheden heeft men immers de keuze welke factoren men in het model wenst op te nemen.

Bovendien wordt, naast de volledigheid van het model, een zekere numerieke nauwkeurigheid nagestreefd. Daartoe wordt een magnetisch netwerkmodel aangewend in plaats van bijvoorbeeld de sterk benaderende draaiveldtheorie. Verder wordt een volledige koppeling tussen het magnetisch en het elektrisch systeem toegepast teneinde de demping van de fluxcomponenten door de statorwikkeling en de rotorkooi in rekening te brengen.

Hoofdstuk 5

Experimentele verificatie van de berekeningsmethode

5.1 Inleiding

Voor de implementatie van de berekeningsmethode voorgesteld in vorig hoofdstuk werd een computerprogramma ontwikkeld aan de hand waarvan men de componenten van de stromen, de velden en de magnetische krachten in een spanningsgevoede inductiemachine met kooianker kan berekenen.

De beschreven methode wordt nu experimenteel geverifieerd enerzijds door het vergelijken van de berekende en de opgemeten flux in de statortanden van een inductiemachine en anderzijds door het vergelijken van de berekende componenten van de magnetische krachten met het opgemeten frequentiespectrum van het geluid en de trillingen.

Voor de experimentele verificatie werden metingen verricht op twee kooiankermotoren, verder 'inductiemachine 1' en 'inductiemachine 2' genoemd, waarvan de kenplaatgegevens en de belangrijkste afmetingen zijn opgenomen in respectievelijk Tabel 5.1 en Tabel 5.2. De rotoren van beide machines hebben rechte open gleuven. De statorwikkelingen van beide machines zijn eenlaagswikkelingen waarbij de spoelgroepen van iedere fase in serie geschakeld zijn. Bij de metingen en berekeningen die verder worden besproken zijn de fasewikkelingen steeds in driehoek geschakeld en draait de motor bij nullast.

Wat de voeding betreft wordt verder zowel netvoeding als invertorvoeding beschouwd. Er wordt hierbij gebruik gemaakt van een invertor met synchrone PWM bij een grondfrequentie f_0 van 50 Hz. Het spectrum van de uitgangsspanning van de invertor is weergegeven in Figuur 5.1.

5.2 Vergelijking van berekende en opgemeten statortandfluxen

5.2.1 Beschrijving van de meetopstelling

Om de berekeningsmethode te verifiëren werd de flux opgemeten in de statortanden van inductiemachine 1. Hiertoe werd rond de top van iedere statortand een meetspoeltje aangebracht. Dit

Tabel 5.1: Kenplaatgegevens en belangrijkste afmetingen van inductiemachine 1

vermogen	3.0 kW
spanning	220 - 240 V Δ / 380 - 415 V Y
stroom	12.3 - 11.6 A / 7.1 - 6.7 A
frequentie	50 Hz
toerental	1420 r/min
aantal poolparen N_p	2
aantal statorgleuven N_s	36
aantal rotorgleuven N_r	32
luchtspleetlengte δ	0.39 mm
axiale lengte van de magnetische kern	127 mm
diameter van de luchtspleet	92 mm

Tabel 5.2: Kenplaatgegevens en belangrijkste afmetingen van inductiemachine 2

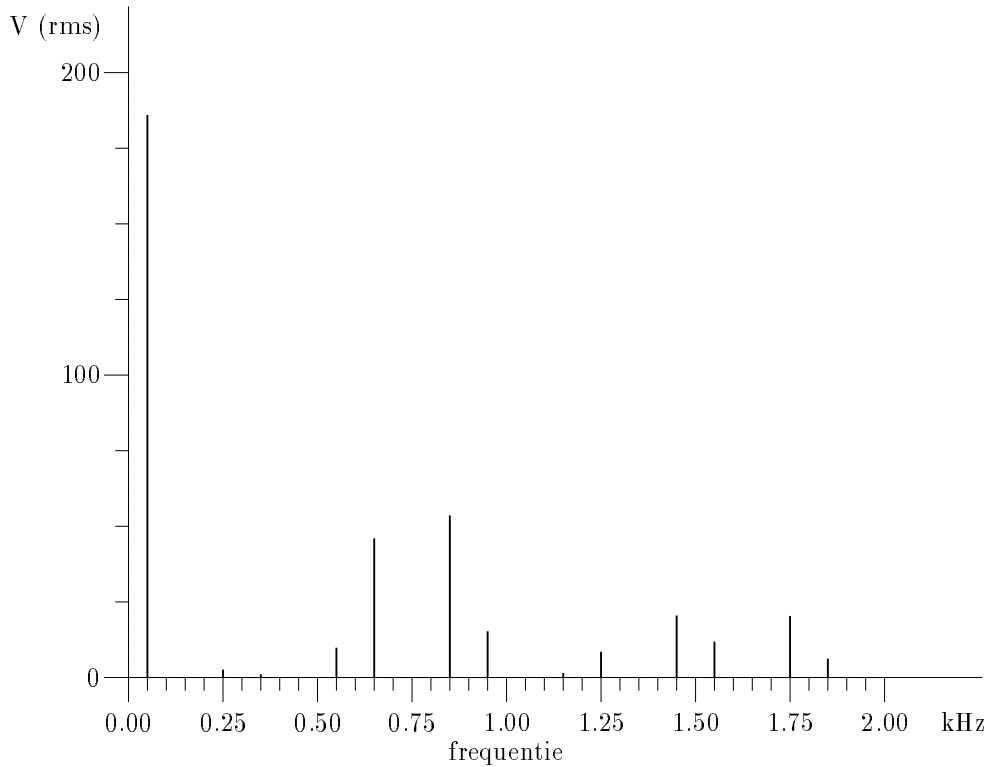
vermogen	2.2 kW
spanning	220 V Δ / 380 V Y
stroom	10 A / 5.8 A
frequentie	50 Hz
toerental	1405 r/min
aantal poolparen N_p	2
aantal statorgleuven N_s	36
aantal rotorgleuven N_r	34
luchtspleetlengte δ	0.25 mm
axiale lengte van de magnetische kern	100 mm
diameter van de luchtspleet	91 mm

laat ons toe om zowel het tijdsverloop als het ruimtelijk verloop van de statortandflux, m.a.w. de componenten met verschillende frequenties en ordes, op te meten.

De spanningen geïnduceerd in de meetspoeltjes worden gemeten met behulp van een data-acquisitiesysteem met 8 kanalen die simultaan bemonsterd worden. Omdat de spanningen over de 36 meetspoeltjes niet terzelfdertijd kunnen opgemeten worden, wordt de volgende meetprocedure toegepast. Men meet de spanning geïnduceerd in het meetspoeltje rond tand 0 en door middel van een Fast Fourier Transform (FFT) bepaalt men het frequentiespectrum van deze geïnduceerde spanning. De opgemeten frequenties f_k worden gegeven door:

$$f_k = k \frac{f_s}{2n} \quad k = 0, \dots, n \quad (5.1)$$

waarbij $2n$ het aantal punten en f_s de bemonsteringssnelheid is. De complexe waarden van de frequentiecomponenten van de geïnduceerde spanningen in meetspoeltje 0 worden als volgt geno-



Figuur 5.1: Spectrum van de uitgangsspanning van de inverter met synchrone PWM

teerd¹:

$$\bar{a}_0^0 \quad \bar{a}_1^0 \quad \bar{a}_2^0 \quad \dots \quad \bar{a}_{n-1}^0 \quad \bar{a}_n^0 \quad (5.2)$$

Vervolgens wordt voor iedere frequentiecomponent k de complexe verhouding tussen de spanning in ieder meetspoeltje i t.o.v. de spanning in meetspoeltje 0 bepaald, of m.a.w. het 'frequentie-antwoord' \bar{h}_k^i ($k=0, \dots, n$) met als 'ingang' de spanning in spoel 0 en als 'uitgang' de spanning in spoel i . Aangezien we over 8 kanalen beschikken, worden in een reeks achtereenvolgende metingen telkens 7 meetspoeltjes en meetspoeltje 0 bemonsterd. Op basis van een FFT-analyse van de opgemeten spanningen in de meetspoeltjes 1 tot $N_s - 1$ en de simultaan opgemeten spanning in spoeltje 0, worden dan de complexe verhoudingen \bar{h}_k^i bepaald:

$$\bar{h}_0^i \quad \bar{h}_1^i \quad \bar{h}_2^i \quad \dots \quad \bar{h}_{n-1}^0 \quad \bar{h}_n^0 \quad (5.3)$$

De frequentiecomponenten van de spanningen in de meetspoeltjes 1 tot $N_s - 1$ worden aldus als volgt bepaald:

$$\bar{a}_k^i = \bar{a}_k^0 \cdot \bar{h}_k^i \quad k = 0, \dots, n \quad ; \quad i = 1, \dots, N_s - 1 \quad (5.4)$$

¹Aangezien tussen de coëfficiënten \bar{a}_k bekomen aan de hand een Fourier-analyse van $2n$ discrete meetwaarden de volgende betrekkingen gelden:

$$\bar{a}_k = \bar{a}_{2n+k} \quad ; \quad \bar{a}_{-k} = \bar{a}_k^*$$

zijn de coëfficiënten \bar{a}_0 en \bar{a}_n reëel.

Tenslotte wordt voor iedere frequentiecomponent k een Fourier-ontwikkeling (in de ruimte) van de complexe waarden \bar{a}_k^i van de geïnduceerde spanningen in de spoeltjes $i = 0, \dots, N_s - 1$ doorgevoerd zodat we een tweedimensionale Fourier-ontwikkeling van de opgemeten spanningen, d.i. in tijd (frequenties) en ruimte (ordes), bekomen:

$$\bar{a}_{kl} \quad k = 0, \dots, n; \quad l = 0, \dots, N_s - 1 \quad (5.5)$$

waarbij de index k betrekking heeft op de frequentie en de index l op de orde. Aangezien de opgemeten spanningen gelijk zijn aan de tijdsafgeleiden van de tandfluxen, worden de componenten van de tandfluxen \bar{b}_{kl} als volgt afgeleid van de componenten van de geïnduceerde spanningen \bar{a}_{kl} :

$$\bar{b}_{kl} = \frac{\bar{a}_{kl}}{j2\pi f_k} \quad k = 1, \dots, n; \quad l = 0, \dots, N_s - 1 \quad (5.6)$$

Wat de praktische realisatie betreft, worden eerst alle metingen uitgevoerd, gestuurd vanuit een PC, waarbij de opgemeten geïnduceerde spanningen opgeslagen worden in bestanden. De verwerking van de meetgegevens gebeurt achteraf op een werkstation. Hierbij kan enerzijds het tijdsverloop van de tandfluxen bekomen worden door numerieke integratie van de opgemeten spanningen. Anderzijds kan men de verschillende componenten \bar{b}_{kl} van de tandflux bepalen door middel van de hierboven beschreven tweedimensionale Fourier-analyse.

5.2.2 Resultaten

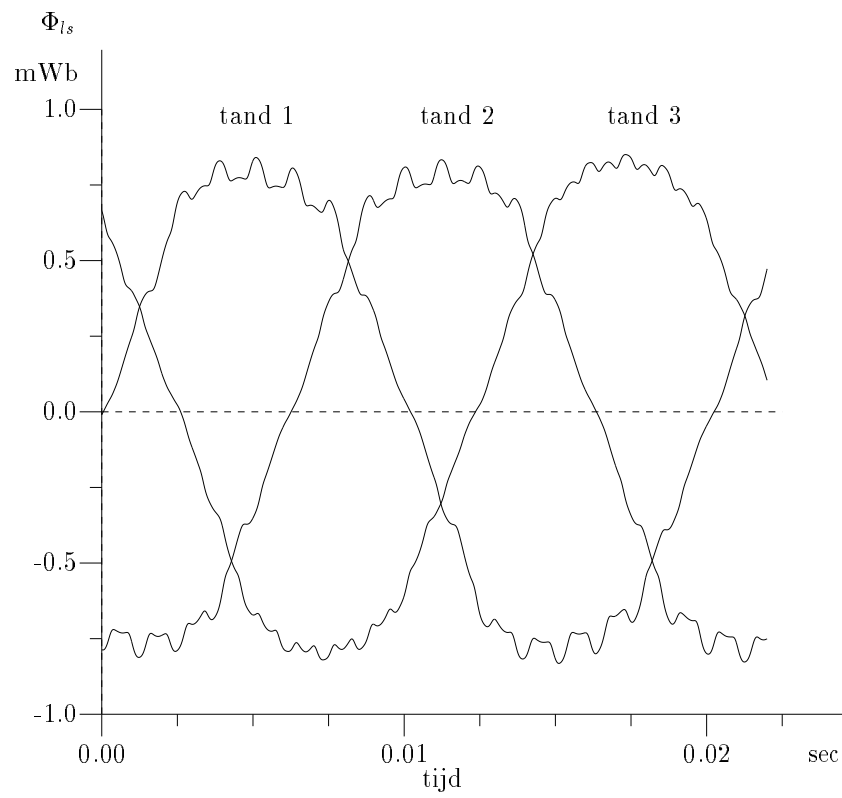
Aangezien de meetspoeltjes zich aan de tandtoppen bevinden tegen de luchtspleet, worden de opgemeten tandfluxen vergeleken met de berekende flux Φ_{l_s} van het magnetische netwerkmodel, d.i. het deel van de statortandflux dat de luchtspleet oversteekt. Voor de eenvoud zullen we deze flux verder kortweg de tandflux noemen.

In Figuur 5.2 wordt het opgemeten fluxpatroon in drie opeenvolgende statortanden bij nullast en bij netvoeding van inductiemachine 1 weergegeven terwijl in Figuur 5.3 het berekend tijdsverloop van de tandflux, bepaald op basis van de berekende fluxcomponenten voor dezelfde werkingstoestand, wordt voorgesteld. Voor de duidelijkheid van de figuur werden hierbij de fluxen in tanden 2 en 3 in de tijd verschoven. In beide figuren wordt het effect van verzadiging en van de rotorgleuven duidelijk geïllustreerd. Verder wordt een goede overeenkomst tussen berekende en opgemeten fluxpatronen waargenomen.

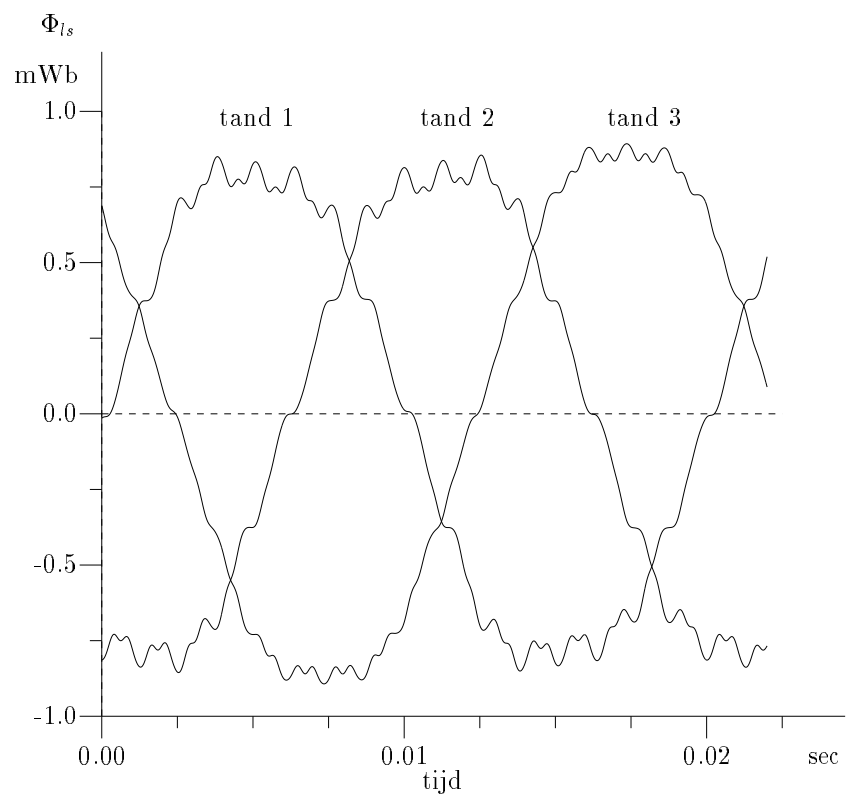
Bij de beschouwde inductiemachine zijn er drie gleuven per pool en per fase ($q = 3$). Bij tanden 1 en 2 bevatten de gleuven aan beide zijden van de tand spoelzijden van dezelfde fase terwijl tand 3 zich bevindt tussen spoelzijden van verschillende fasen. Het fluxpatroon van tand 3 is duidelijk verschillend van die in tanden 1 en 2, zowel bij de opgemeten als bij de berekende tandfluxen.

In Figuur 5.4 worden de gemeten en berekende tandfluxen tesamen voorgesteld. Hieruit blijkt de afwijking qua amplitude groter te zijn bij tand 3 die zich tussen spoelzijden van verschillende fasen bevindt dan bij de andere tanden.

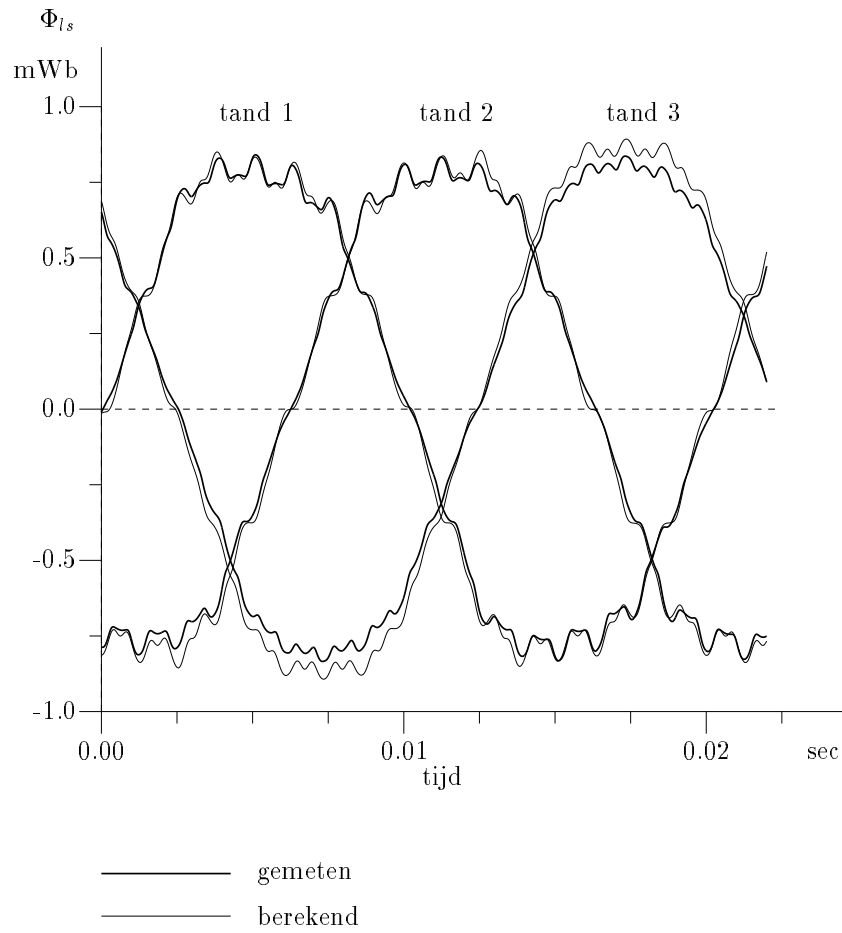
Verder worden enkele frequentiecomponenten van de opgemeten en de berekende flux met elkaar vergeleken. Bij serieschakeling van de spoelgroepparen van een fase wordt de algemene uitdrukking van de pulsaties en de ordes van de fluxcomponenten gegeven door (4.419)-(4.420) met $p = 2$ en



Figuur 5.2: Opgemeten fluxpatronen in drie statortanden (inductiemachine 1, netvoeding)



Figuur 5.3: Berekende fluxpatronen in drie statortanden (inductiemachine 1, netvoeding)



Figuur 5.4: Opgemeten en berekende fluxpatronen in drie statortanden (inductiemachine 1, netvoeding)

$h = 0$ (netvoeding):

$$\omega_{\phi s_l} = (1 + 2v)\omega_0 + (bN_r + e_d)\Omega \quad (5.7)$$

$$\kappa_{\phi s_l} = (1 + 2v + 6a)N_p + bN_r + e_s + e_d \quad (5.8)$$

met

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \cdot 50 \text{ rad/s} \quad (5.9)$$

Bij nullast is de slip s ongeveer nul zodat de hoeksnelheid van de rotor Ω gegeven wordt door:

$$\Omega = (1 - s)\frac{\omega_0}{N_p} \approx \frac{\omega_0}{N_p} \quad (5.10)$$

Beschouwen we bijvoorbeeld de fluxcomponenten veroorzaakt door verzadiging met $v = 1$ en $b = e_d = e_s = 0$. Bij de beschouwde inductiemachine ($N_p = 2$) bekomen we aldus velden met frequentie $3f_0 = 150\text{Hz}$ en ordes gegeven door:

$$\kappa_{\phi s_l} = (3 + 6a)N_p = 6 + 12a \quad (5.11)$$

Wegens de equivalentie tussen de componenten met ordes κ en $\kappa + N_s$ beschouwen we voor de voorstelling van de meet- en berekeningsresultaten het volgende interval voor de ordes:

$$-\frac{N_s}{2} + 1 \leq \kappa \leq \frac{N_s}{2} \quad (5.12)$$

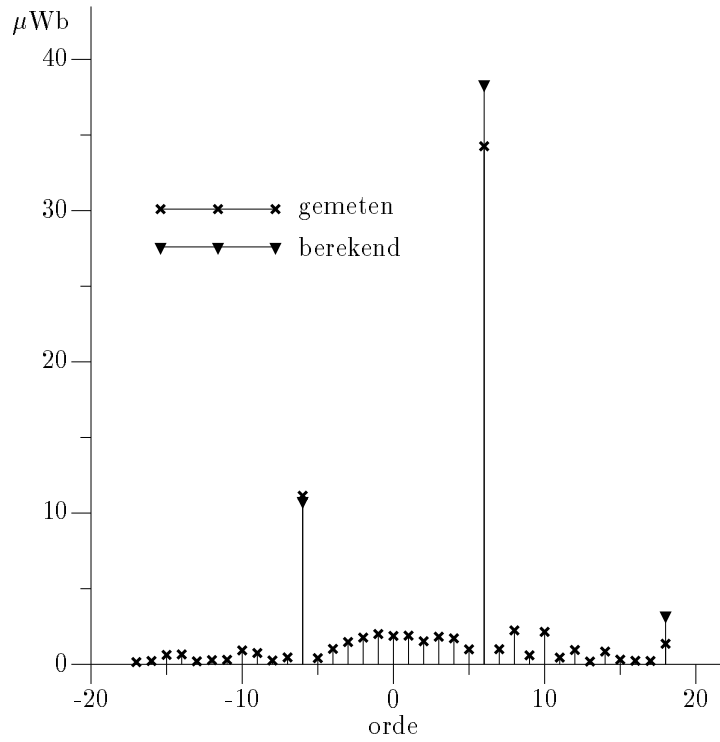
Bij de Fourier-analyse van de meetresultaten kan men de componenten met ordes tot $\frac{N_s}{2}$ (in absolute waarde) bepalen, waarbij de nauwkeurigheid voor de hogere ordes echter afneemt.

Met $N_s = 36$ bij zowel inductiemachine 1 als inductiemachine 2 is het interval voor de ordes dus gegeven door:

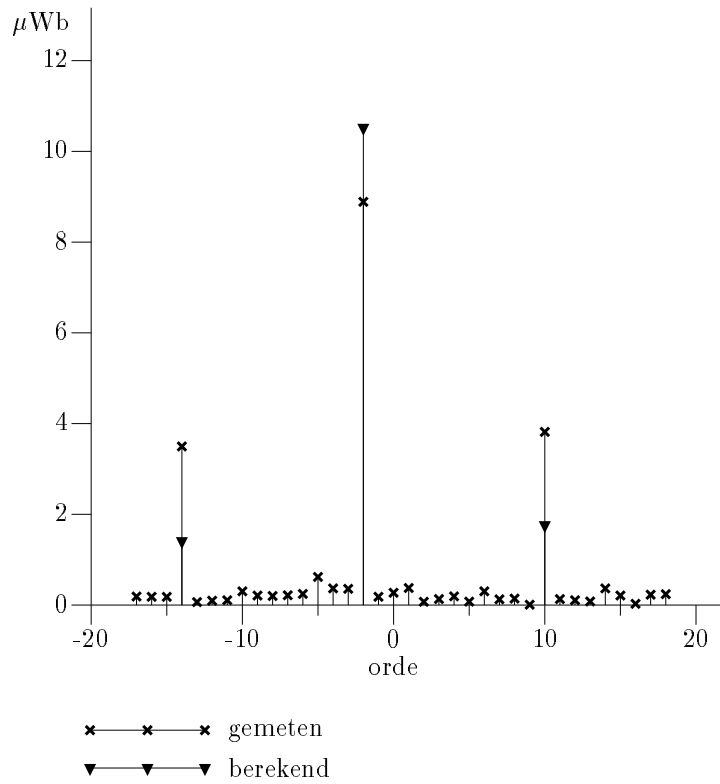
$$-17 \leq \kappa \leq 18 \quad (5.13)$$

Voor de componenten met frequentie 150 Hz bekomen we volgens (5.11) de ordes -6, 6 en 18. In Figuur 5.5 worden de drie berekende componenten met frequentie 150 Hz vergeleken met de opgemeten componenten. De ordes 6 en -6 blijken inderdaad duidelijk aanwezig te zijn in de opgemeten tandfluxen. Orde 18 is veel minder uitgesproken zowel volgens de berekeningen als de metingen en kan trouwens niet nauwkeurig opgemeten worden. We bemerken voor de ordes 6 en -6 een vrij goede overeenkomst tussen de metingen en de berekeningsresultaten.

Om het rotorgleueffect te illustreren beschouwen we de fluxcomponenten met $b = 1$ en $v = e_s = e_d = 0$. Met $N_r = 32$ voor inductiemachine 1 bekomen we voor deze waarden van de parameters componenten met een frequentie van (ongeveer) 850 Hz en met ordes -14, -2 en 10. Uit Figuur 5.6 blijkt dat bij de opgemeten tandfluxcomponenten met frequentie 850 Hz de componenten met ordes -14, -2 en 10 overheersen. Voor orde -2 is de overeenkomst tussen de berekende en de opgemeten waarde vrij goed, terwijl er voor de ordes -14 en 10 een grotere afwijking optreedt.



Figuur 5.5: 150 Hz-componenten van de statortandflux (inductiemachine 1, netvoeding)



Figuur 5.6: 850 Hz-componenten van de statortandflux (inductiemachine 1, netvoeding)

5.3 Vergelijking van opgemeten frequentiespectra met de berekende krachtcomponenten

Omdat de magnetische krachten niet rechtstreeks kunnen opgemeten worden, worden de berekende componenten van de magnetische krachten vergeleken met het opgemeten frequentiespectrum van het geluid en de trillingen van de inductiemachines. De amplitudes van de componenten van het geluid en de trillingen worden niet alleen door de amplitude van de exciterende krachten bepaald maar ook door de mechanische respons van het statorhuis op de krachten en door de akoestische eigenschappen van de machines. De vergelijking tussen de krachtgolven en het geluid en de trillingen is dus eerder kwalitatief dan kwantitatief.

De algemene uitdrukking voor de componenten van de magnetische krachten bij beide inductiemachines wordt gegeven door (4.418)-(4.418) met $p = 2$:

$$\omega_{f_k} = (6h + 2v)\omega_0 + (bN_r + e_d)\Omega \quad (5.14)$$

$$\kappa_{f_k} = (6a + 2v)N_p + bN_r + e_s + e_d \quad (5.15)$$

waarbij, bij nullast, de hoeksnelheid van de rotor gegeven wordt door :

$$\Omega \approx \frac{\omega_0}{N_p} \quad (5.16)$$

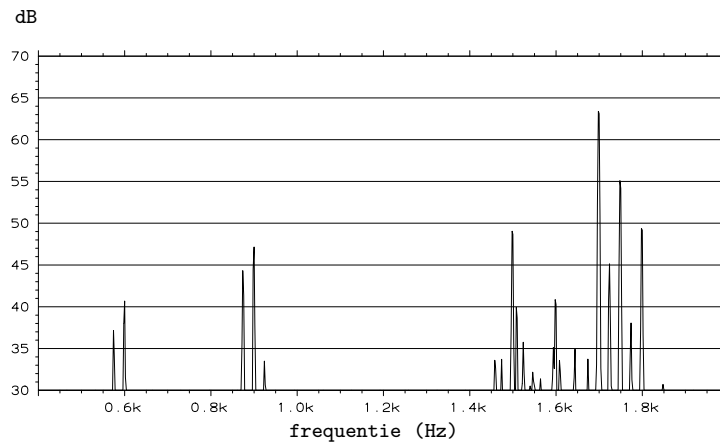
5.3.1 Resultaten voor inductiemachine 1

Teneerste beschouwen het geval van netvoeding ($h = 0$).

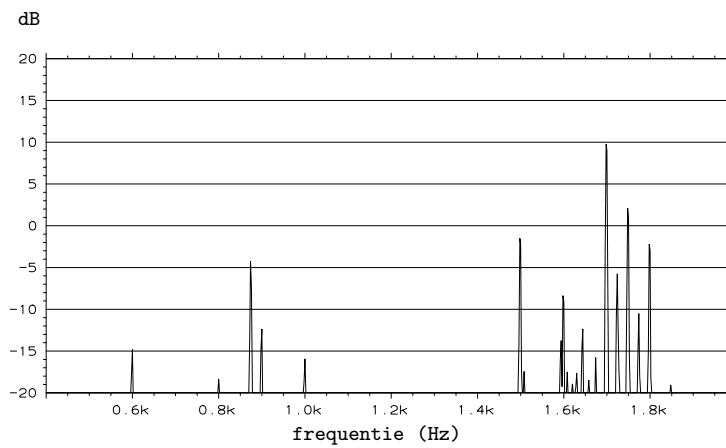
Als we bij inductiemachine 1 geen excentriciteit in rekening brengen ($e_s = e_d = 0$) zijn de ordes van de krachtcomponenten steeds viervouden volgens (5.15) met $N_p = 2$ en $N_r = 32$. Bij nullast ($\omega \approx \frac{\omega_0}{N_p}$) zijn de frequenties van de krachtcomponenten in dit geval (benaderend) veelvouden van de dubbele voedingsfrequentie, m.a.w veelvouden van 100 Hz: Uit Figuren 5.7 en 5.8 die de frequentiespectra van het geluid en de trillingen in het interval 400 Hz - 2000 Hz weergeven blijkt duidelijk dat niet alle waargenomen frequenties veelvouden van 100 Hz zijn, bijvoorbeeld de frequentie (\pm) 1750 Hz die zeer duidelijk optreedt.

Indien we echter wel excentriciteit in rekening brengen bekomen we ook andere ordes en frequenties voor respectievelijk viervouden en veelvouden van 100 Hz. In Figuur 5.9 worden de resultaten van de berekeningen van de radiale krachten voorgesteld waarbij rekening wordt gehouden met gleueffect, verzadiging en excentriciteit. De amplitudes van de krachtcomponenten (in N) worden hierbij in een logaritmische schaal weergegeven. In deze figuur zijn enkel de componenten tot tweede orde (in absolute waarde²) opgenomen omdat deze van primordiaal belang blijken te zijn voor de productie van geluid en trillingen. De meeste frequenties in de opgemeten frequentiespectra kunnen immers verklaard worden aan de hand van de berekende krachtcomponenten van tweede orde, nl. de frequenties 875, 900, 1500, 1600, 1700, 1725 en 1750 Hz. De frequenties van de krachtcomponenten van nulde orde met (relatief) hoge amplitudes blijken ook duidelijk voor te komen in de opgemeten spectra, bijv. 600 Hz en 1800 Hz.

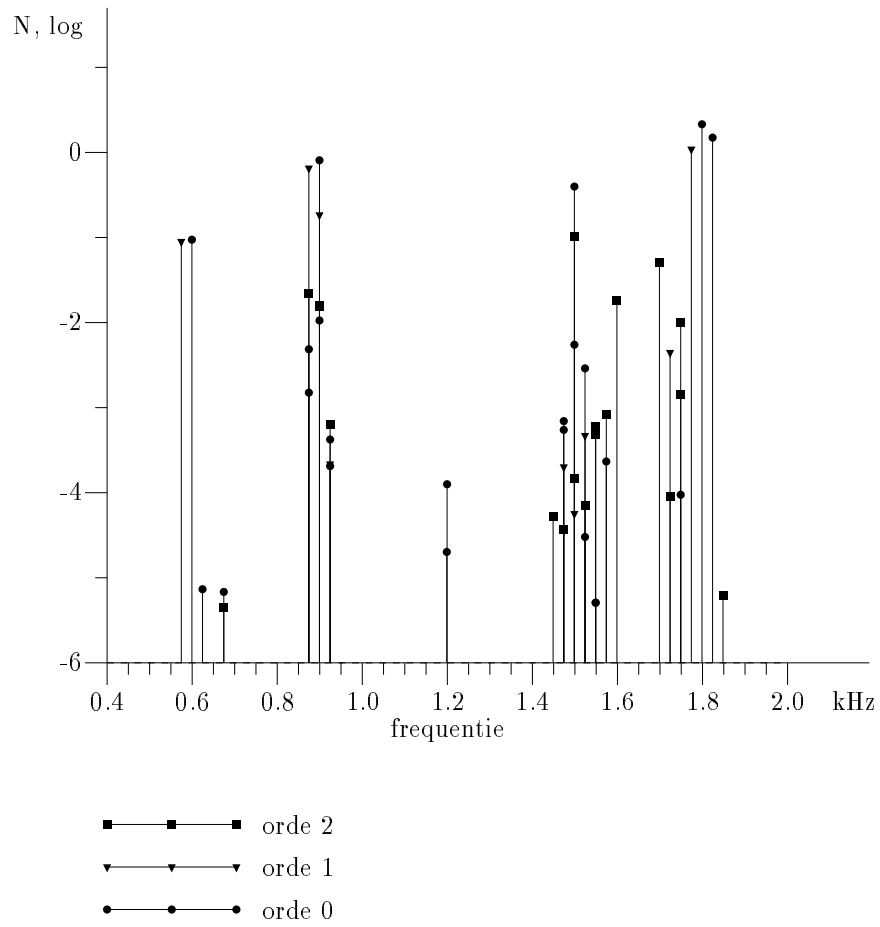
²Bij de voorstelling van de resultaten beschouwen we, zoals voorheen reeds vermeld, het volgende interval voor de



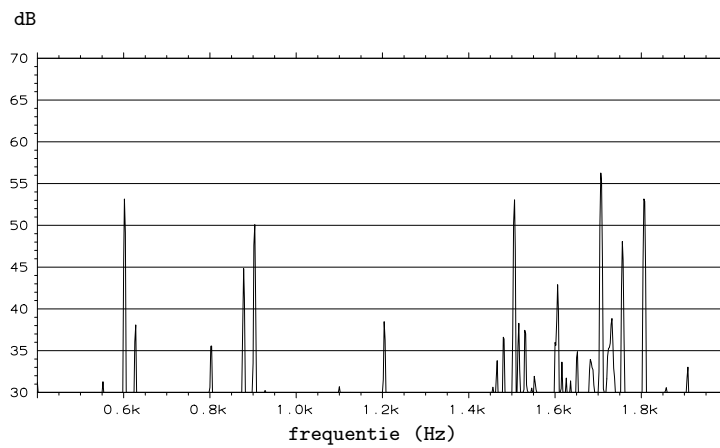
Figuur 5.7: Frequentiespectrum van de geluidsintensiteit (inductiemachine 1, netvoeding)



Figuur 5.8: Frequentiespectrum van de trillingen (inductiemachine 1, netvoeding)



Figuur 5.9: Berekende radiale krachten tot tweede orde (inductiemachine 1, netvoeding)



Figuur 5.10: Frequentiespectrum van de geluidsintensiteit (inductiemachine 1, invertorvoeding)

Bij voeding van de machine door een inverter met synchrone PWM geldt net zoals bij netvoeding dat bij inductiemachine 1 de ordes van de krachtcomponenten viervouden zijn en de frequenties veelvoudig zijn van 100 Hz indien men geen rekening houdt met excentriciteit. In Figuur 5.10 wordt het opgemeten frequentiespectrum bij invertervoeding voorgesteld. Hierbij valt op dat de voorkomende frequenties nagenoeg dezelfde zijn als bij netvoeding (Figuur 5.7). Bij deze inductiemachine kan het frequentiespectrum van het geluid bij invertervoeding verklaard worden aan de hand van de berekende krachtcomponenten bij netvoeding waarbij de effecten van de gleuven, verzading en excentriciteit in rekening zijn gebracht (Figuur 5.9). De spanningsharmonischen van de voeding blijken bij inductiemachine 1 dus weinig invloed te hebben, althans in het beschouwde frequentie-interval. Net als bij netvoeding blijken de krachtcomponenten van vierde orde die ontstaan door gleueffect van ondergeschikt belang te zijn voor het geluid bij deze inductiemachine.

5.3.2 Resultaten voor inductiemachine 2

Het belangrijkste verschil tussen inductiemachine 1 en 2, voor wat de geluidsproductie betreft, is het aantal rotoegleuven. Bij inductiemachine 2 met $N_r = 34$ kunnen er door gleueffect krachtcomponenten optreden van tweede orde.

Beschouwen we bijvoorbeeld de component met parameters $b = 1$ en $h = a = e_d = e_s = v = 0$, dan bekomen we volgens (5.14)-(5.15) een component met frequentie van ± 850 Hz en orde $N_r = 34$, wat equivalent is met orde $N_r - N_s = 34 - 36 = -2$. Het effect van deze krachtcomponent van tweede orde met frequentie 850 Hz is duidelijk merkbaar in het spectrum van het geluid en de trillingen van inductiemachine 2, weergegeven in Figuren 5.11 en 5.12.

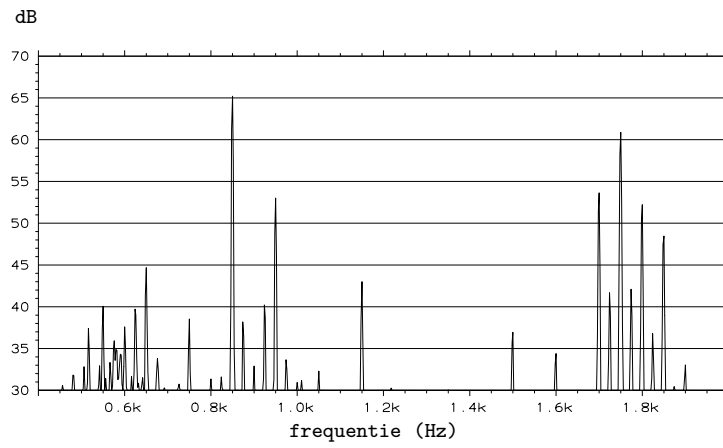
In Figuur 5.13 worden de krachtcomponenten (tot tweede orde) voorgesteld die resulteren uit de berekeningen bij netvoeding waarbij opnieuw rekening wordt gehouden met zowel gleueffect, verzadiging als excentriciteit. Er is een duidelijke overeenkomst tussen de frequenties van de berekende krachtgolven van tweede orde (Figuur 5.13) en de waargenomen frequenties in het geluid en de trillingen (Figuren 5.11 en 5.12).

Bij inductiemachine 2 bij netvoeding ontstaan er door gleueffect krachtcomponenten van tweede orde, die duidelijk te merken zijn in de opgemeten frequentiespectrum van het geluid. Bij invertervoeding ontstaan volgens (5.14)-(5.15) door de spanningsharmonischen (parameter h) tal van bijkomende componenten van tweede orde. Bij deze machine kan het frequentiespectrum van het geluid, voorgesteld in Figuur 5.15, bijna volledig verklaard worden aan de hand van de berekende krachtcomponenten die men bekomt door enkel rekening te houden met de spanningsharmonischen en het gleueffect en die voorgesteld zijn in Figuur 5.14. De voornaamste frequenties in het opgemeten spectrum blijken overeen te komen met krachtcomponenten van tweede orde.

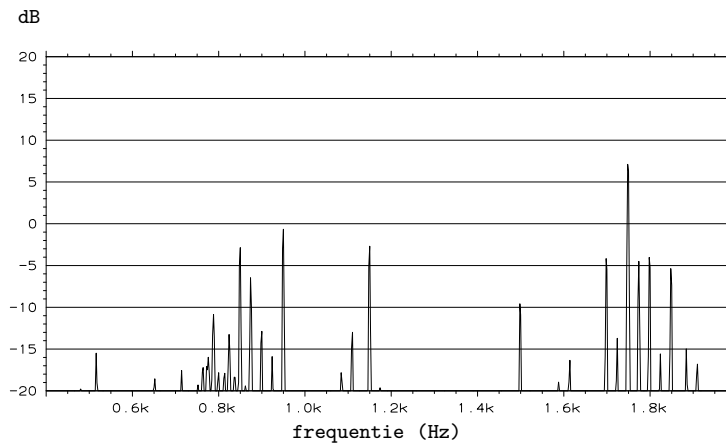
ordes (voor $N_s = 36$):

$$-17 \leq \kappa_f \leq 18 \tag{5.17}$$

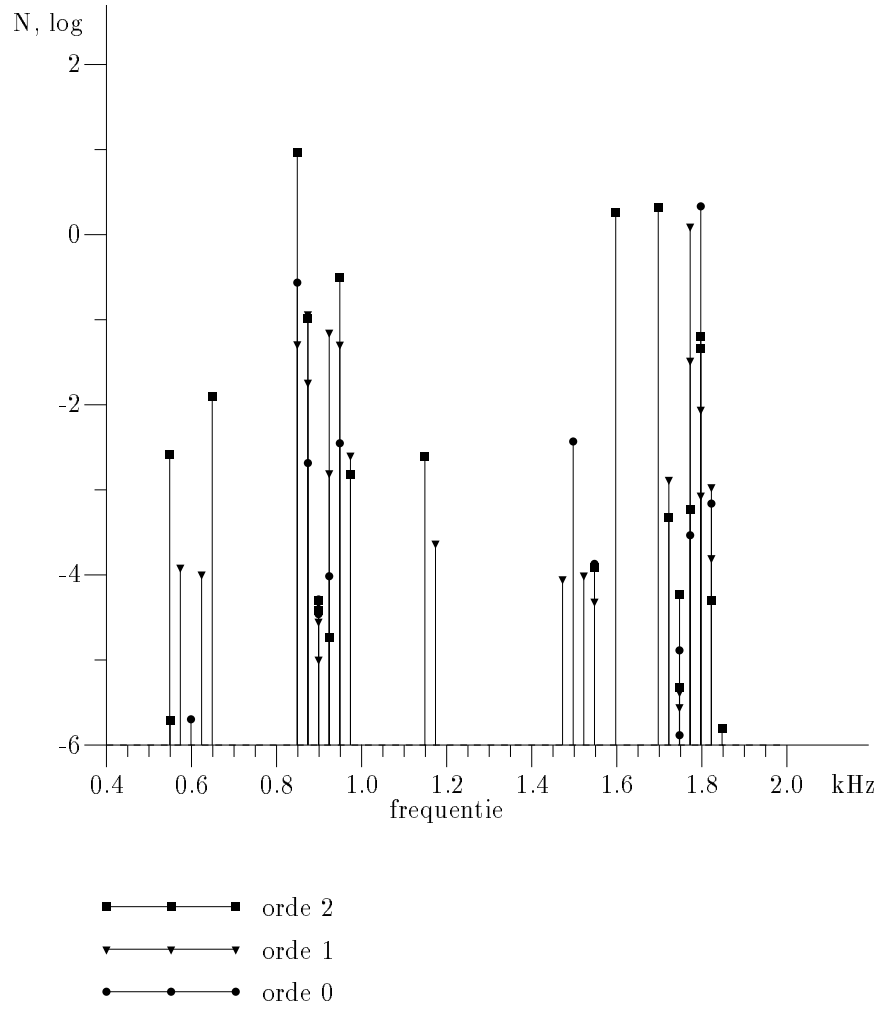
Componenten met tegengestelde orde vertonen dezelfde ruimtelijke verdeling. Het teken van de orde bepaalt als het ware enkel de draaizin van de krachtcomponent (of 'krachtgolf'), zodat verder geen onderscheid meer wordt gemaakt tussen componenten met positieve en negatieve ordes.



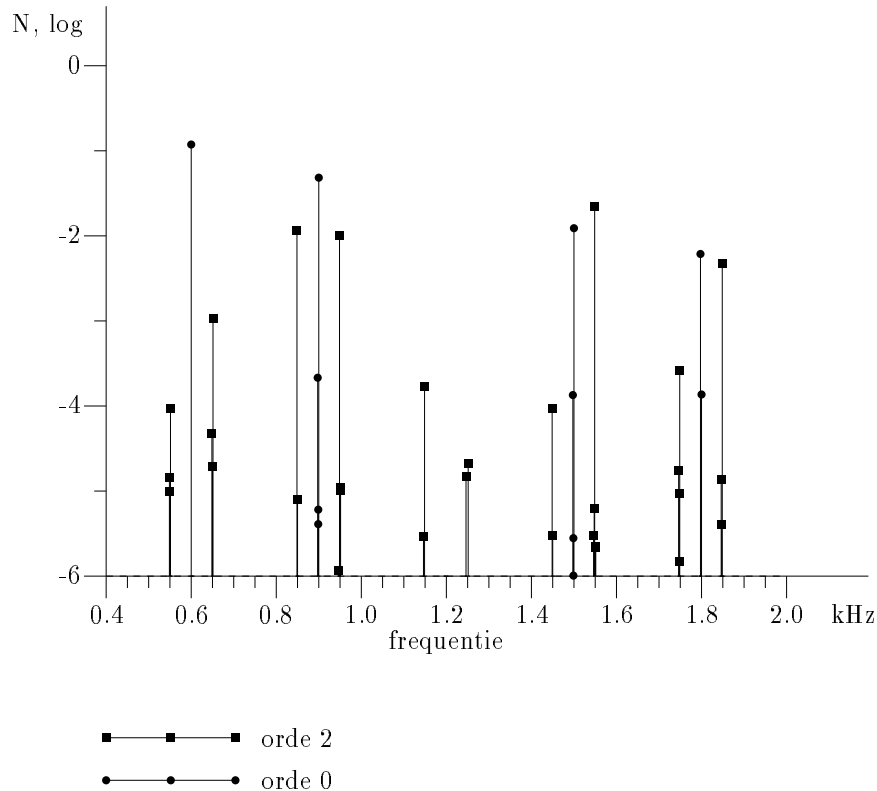
Figuur 5.11: Frequentiespectrum van de geluidsintensiteit (inductiemachine 2, netvoeding)



Figuur 5.12: Frequentiespectrum van de trillingen (inductiemachine 2, netvoeding)



Figuur 5.13: Berekende radiale krachten tot tweede orde (inductiemachine 2, netvoeding)



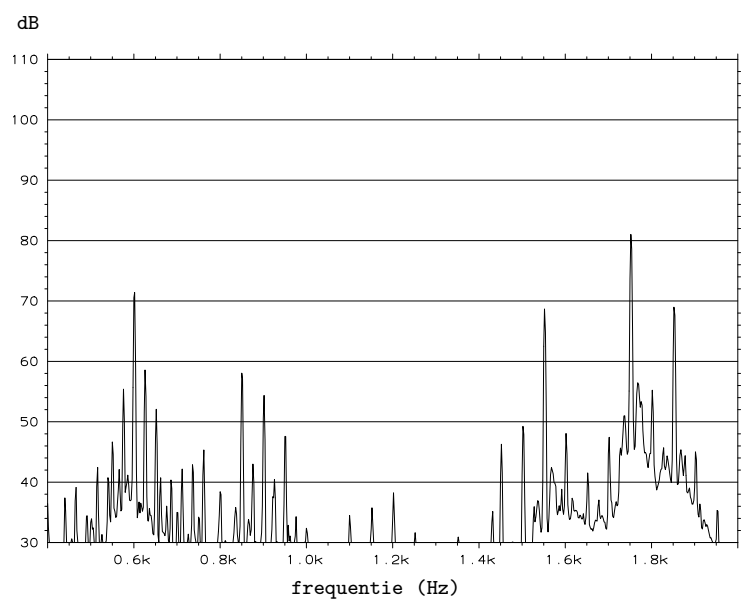
Figuur 5.14: Berekende radiale krachten tot tweede orde (inductiemachine 2, invertorvoeding)

5.4 Besluit

Uit de vergelijking van de berekende en de opgemeten fluxpatronen in de statortanden blijkt dat met de voorgestelde berekeningsmethode die steunt op een magnetisch netwerkmodel de magnetische fluxverdeling in een machine vrij nauwkeurig kan berekend worden. De verschillende componenten (frequenties en ordes) van de flux die bij de berekeningen worden beschouwd blijken in de opgemeten fluxen nadrukkelijk aanwezig te zijn.

Op basis van de berekende krachtgolven kunnen de waargenomen frequentiespectra van het geluid en van de trillingen worden voorspeld. Bij de beschouwde (kleine) inductiemachines blijken de krachtcomponenten van tweede orde een zeer voorname rol te spelen. Bij bepaalde combinaties van het aantal stator- en rotorgleuven (zoals bijvoorbeeld bij inductiemachine 1) moet men bij de berekeningen van de krachtgolven rekening houden met gleueffect, verzadiging en excentriciteit om het frequentiespectrum van het geluid te kunnen voorspellen, zowel bij netvoeding als bij invertorvoeding. Bij andere combinaties (bijvoorbeeld bij inductiemachine 2) kan het bij invertorvoeding echter volstaan enkel het gleueffect en de spanningsharmonischen in rekening te brengen om het geluidsspectrum te verklaren.

Om een verder analyse van het geluid en de trillingen van de inductiemachines mogelijk te maken dient de berekening van de magnetische krachten aangevuld te worden met een mechanisch en akoestische modellering.



Figuur 5.15: Frequentiespectrum van de geluidsintensiteit (inductiemachine 2, invertorvoeding)

Hoofdstuk 6

Slotbeschouwingen

In dit werk werd het elektromagnetisch aspect van de productie van geluid en trillingen bij inductiemachines behandeld.

Eerst is een algemene werkwijze voor het berekenen van de vervormingen in gemagnetiseerd materiaal opgesteld. Daarbij wordt een magnetische langeafstandskrachtwerking gedefinieerd die eenduidig bepaald is door de macroscopische velden. De totale kracht en het totale moment die door de magnetische langeafstandskrachtwerking uitoefend worden op een deel van een magnetisch lichaam kunnen (onder andere) berekend worden aan de hand van de elektromagnetische spanning $\bar{\sigma}_{em}(\bar{n})$, die diverse equivalente formuleringen kent (Chu- en Ampère-formuleringen). Uit de vorm van $\bar{\sigma}_{em}(\bar{n})$ blijkt dat de magnetische langeafstandskrachtwerking niet in de vorm van een krachtdichtheid (kracht per volume-eenheid) kan geformuleerd worden. Naast de langeafstandskrachtwerking wordt de korteafstandskracht beschouwd die in het algemeen van zowel magnetische als mechanische aard is en door middel van de spanning $\bar{\tau}(\bar{n})$ wordt weergegeven.

Door de magnetische verschijnselen en de elastische verschijnselen (vervorming) terzelfdertijd te beschouwen, komt men tot een stelsel magneto-elastische vergelijkingen die ons toelaten de magnetische velden, de spanning $\bar{\tau}(\bar{n})$ en de vervormingen te berekenen. De magnetische en elastische vergelijkingen zijn hierbij op verschillende niveau's met elkaar gekoppeld, o.a. door de constitutieve wetten. De magneto-elastische vergelijkingen kunnen zowel in een Chu- als een Ampère-formulering uitgedrukt worden, waarbij beide formuleringen equivalent zijn. Verder is er een methode voorgesteld om de vervorming ten gevolge van enkel de magnetische langeafstandskrachtwerking te bepalen aan de hand van een fictieve magnetische krachtdichtheid. Dit komt overeen met het bepalen van de vervorming als men de vervorming ten gevolge van interne structuurveranderingen, de zgn. zuivere magnetostrictie verwaarloost.

De voorgestelde methode verschilt, zowel wat de theoretische achtergrond als wat het uiteindelijke resultaat betreft, fundamenteel van de methodes voor het berekenen van de magnetische krachtenverdeling die steunen op de lokale toepassing van de Maxwellspanningen of van het principe van de virtuele arbeid en die in de literatuur veelvuldig besproken en toegepast worden. Deze methodes uit de literatuur steunen dus op werkwijzen die in principe enkel gelden voor de bepaling van de totale kracht en het totaal moment die op een magnetisch lichaam inwerken.

De hier afgeleide methode voor het berekenen van de vervorming ten gevolge van de magnetische langeafstandskrachtwerking is met behulp van de eindige-elementenmethode toegepast voor het

berekenen van de fictieve magnetische krachtenverdeling en de corresponderende vervorming van inductiemachines. Hierbij werd tevens een vergelijking gemaakt met een methode die steunt op de lokale toepassing van het principe van de virtuele arbeid, zoals beschreven in de literatuur.

Naast deze methode die steunt op de eindige-elementenmethode en die aldus kan toegepast worden op tal van elektromagnetische systemen, is er een tweede methode voor het bepalen van de magnetische krachtwerking ontwikkeld, specifiek voor inductiemachines. Bij deze methode wordt niet de eigenlijke verdeling van de (fictieve) magnetische krachten in de machine berekend maar wel de magnetische langeafstandskracht per statorsector. Deze methode die steunt op een gekoppeld magnetisch-elektrisch netwerk en ontwikkeld is in het frequentie-orde-domein laat toe de exciterende magnetische krachten zowel qua frequentie, orde als amplitude te bepalen. Het feit dat deze methode in het frequentie-orde-domein direct de verschillende componenten van de krachtwerking oplevert, die de frequenties van het geluid en de trillingen van magnetische oorsprong bepalen, is een voordeel ten opzichte van berekeningsmethodes in het tijdsdomein. Bij deze laatste kan immers een zeer groot aantal tijdsstappen vereist zijn om de relevante frequenties weer te geven, wat resulteert in een grote rekentijd.

Het geluid en de trillingen van magnetische oorsprong bij inductiemachines worden veroorzaakt door verschillende factoren, met name de harmonischen van de aangelegde spanning, het gleueffect, excentriciteit en verzadiging. De voorgestelde berekeningsmethode laat toe met al deze factoren terzelfdertijd rekening te houden zodat het frequentiespectrum van het geluid en de trillingen in detail kan geanalyseerd worden. Dit is in tegenstelling tot de meeste methodes die beschreven zijn in de literatuur waarbij men zich namelijk toelegt op de studie van één bepaalde factor, bijvoorbeeld de invloed van de vermogenslektronische voeding op de geluidsproductie.

Eveneens in tegenstelling tot de meeste methodes uit de literatuur zijn de magnetische en elektrische vergelijkingen volledig met elkaar gekoppeld, zodat de demping van de verschillende fluxcomponenten door de stator- en rotorstromen in rekening wordt gebracht. De demping door de stromen in de statorwikkeling wordt sterk bepaald door de schakeling van de statorspoelen. Daarom zijn bij het opstellen van de elektrische vergelijkingen verschillende types statorwikkelingen beschouwd.

De berekeningsmethode werd experimenteel geverifieerd aan de hand van metingen van de flux in de statortanden van een inductiemachine en verder door de vergelijking van de berekende krachtcomponenten met het opgemeten frequentiespectrum van het geluid en de trillingen van een paar inductiemachines. Uit de vergelijking van de opgemeten en de berekende statortandfluxen blijken de fluxcomponenten die in het magnetisch-elektrisch netwerkmodel in aanmerking worden genomen ook nadrukkelijk in de opgemeten fluxen aanwezig te zijn. Er is ook een goede overeenkomst waar te nemen tussen het opgemeten en het berekende tijdsverloop van de statortandflux. Uit de opgemeten frequentiespectra van het geluid zowel bij netvoeding als bij invertorvoeding blijkt dat men bij bepaalde combinaties van het aantal stator- en rotorgleuven voor de berekening van de magnetische krachtgolven verschillende factoren zoals gleueffect, excentriciteit en verzadiging terzelfdertijd in rekening moet brengen om de frequenties van het voortgebrachte geluid te kunnen voorspellen.

De magnetische krachtwerking is slechts één van de aspecten van de geluids- en trillingsproductie bij elektrische machines. Om op basis van de exciterende magnetische krachtwerking de trillingen van de machine en verder de geluidsafstraling te bepalen, is een nauwkeurige mechanische en akoestische modellering vereist. Een voor de hand liggende numerieke techniek voor de

mechanische modellering is de eindige-elementenmethode. Deze methode is reeds in Hoofdstuk 3 gebruikt voor de bepaling van de magnetische krachtwerking en de daaruitvolgende vervorming van een inductiemachine aan de hand van een sterk vereenvoudigd mechanisch model van de stator en voor het statisch geval. Het ligt bijgevolg voor de hand deze methode verder uit te breiden naar het dynamische geval waarbij men (noodgedwongen) zal moeten beroep doen op berekeningen van de magnetische velden en de magnetische krachten in het tijdsdomein die zoals reeds gezegd zeer hoge rekentijden met zich mee kunnen brengen. De berekende krachten kunnen dan door middel van Fourier-analyse in frequentiecomponenten ontbonden worden om met behulp van modale analyse (in het frequentiedomein) de vervormingen (trillingen) te berekenen. Ook de mogelijkheden om de trillingen van de machine te bepalen op basis van de componenten van de magnetische krachten op de statorsectoren die berekend worden op basis van het magnetisch netwerkmodel, dienen verder onderzocht te worden.

In ieder geval moet voor de mechanische berekeningen een accuraat mechanisch model van elektrische machines opgesteld worden. Dit is geenszins een eenvoudige opgave wegens de complexe mechanische structuur van elektrische machines: een blikpakket, wikkelingen geïmpregneerd met hars, een statorhuis (eventueel met koelvinnen) enz. . Bovendien kan een driedimensionaal model vereist zijn om de invloed van bijvoorbeeld schuingestelde gleuven en de lagerschalen in rekening te kunnen brengen.

Verder onderzoek op het gebied van de mechanische modellering om tot een gekoppeld elektromagnetisch-mechanisch model voor de bepaling van de trillingen en verder het geluid van magnetische oorsprong te komen is dus wenselijk.

Appendix A

Magnetische kracht- en koppeldichtheden en spanningen op randoppervlakken

De fictieve krachtdichtheden afgeleid op basis van het Chu- en het Ampèremodel kunnen beschreven worden aan de hand van een tensor volgens:

$$\vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \vec{T} \quad (\text{A.1})$$

In deze appendix worden de tensoren $\vec{T}_c, \vec{T}_{c'}, \vec{T}_a$ en $\vec{T}_{a'}$ bepaald die corresponderen met respectievelijk de krachtdichtheden $\vec{f}_c, \vec{f}_{c'}, \vec{f}_a$ en $\vec{f}_{a'}$. Tevens wordt aangetoond dat ook de koppeldichtheden $\vec{c}_c, \vec{c}_{c'}, \vec{c}_a$ en $\vec{c}_{a'}$ afgeleid kunnen worden van deze tensoren.

Ter hoogte van scheidingsoppervlakken tussen twee verschillende materialen vertonen de krachtdichtheden een singulariteit in de vorm van een kracht per oppervlakte-eenheid, m.a.w. een spanning. In het bijzonder worden hier de spanningen op scheidingsoppervlakken tussen magnetisch en niet-magnetisch materiaal, de zgn. randoppervlakken beschouwd. In deze appendix worden dus tevens de spanningen op randoppervlakken $\vec{T}_c, \vec{T}_{c'}, \vec{T}_a$ en $\vec{T}_{a'}$ afgeleid die corresponderen met respectievelijk $\vec{f}_c, \vec{f}_{c'}, \vec{f}_a$ en $\vec{f}_{a'}$. Ter hoogte van de randoppervlakken wordt de relatie tussen de magnetische velden \vec{B} en \vec{H} binnen het magnetisch materiaal en de velden \vec{B}' en \vec{H}' in het niet-magnetisch materiaal ($\vec{M}' = 0$), zoals voorgesteld in Figuur A.1 gegeven door:

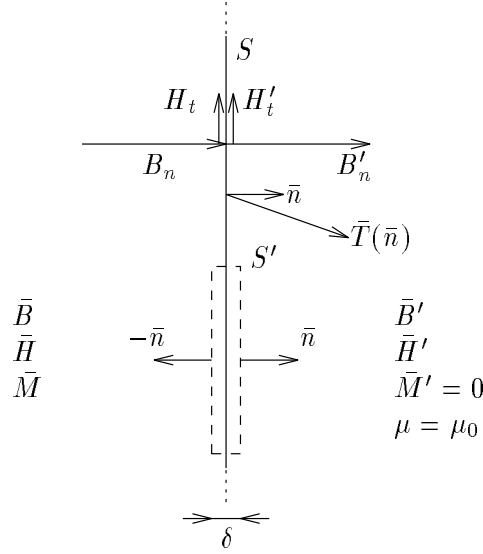
$$B'_n = B_n \quad (\text{A.2})$$

$$H'_n = H_n + M_n = \frac{1}{\mu_0} B_n \quad (\text{A.3})$$

$$H'_t = H_t \quad (\text{A.4})$$

$$B'_t = B_t - \mu_0 M_t = \mu_0 H_t \quad (\text{A.5})$$

De spanning op een randoppervlak S kan bepaald worden aan de hand de kracht op het materiaal binnen een oppervlak S' dat een deel van het randoppervalk S omvat, zoals voorgesteld in Figuur A.1 met $\delta \rightarrow 0$. De spanningen op randoppervlakken worden bijgevolg bepaald op basis van het verschil van de spanningstensors aan beide zijden van het scheidingsoppervlak.



Figuur A.1: Spanning op een randoppervlak

A.1 Chu-model

Uit het Chu-model kunnen twee fictieve kracht- en koppeldichtheden worden afgeleid, nl. één afgeleid van de kracht en het koppel op een elementaire Chu-dipool in de vrije ruimte (index c) en één gebaseerd op de krachtwerking op de magnetische ladingsdichtheid die de magnetisatie voorstelt (index c').

A.1.1 Krachtwerking op dipolen

De (fictieve) krachtdichtheid \bar{f}_c afgeleid van de kracht op een Chu-dipool in de vrije ruimte, zie §2.2.3, kan als volgt omgevormd worden tot de divergentie van een spanningstensor \bar{T}_c :

$$\bar{f}_c = \bar{J} \times \mu_0 \bar{H} + (\mu_0 \bar{M} \cdot \bar{\nabla}) \bar{H} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} &= (\bar{\nabla} \times \bar{H}) \times \mu_0 \bar{H} + \bar{\nabla} \cdot (\mu_0 \bar{M} \bar{H}) - (\bar{\nabla} \cdot \mu_0 \bar{M}) \bar{H} \\ &= \mu_0 (\bar{H} \cdot \bar{\nabla}) \bar{H} - \frac{1}{2} \mu_0 \bar{\nabla} H^2 + \bar{\nabla} \cdot (\mu_0 \bar{M} \bar{H}) - (\bar{\nabla} \cdot \mu_0 \bar{M}) \bar{H} \end{aligned}$$

$$= \mu_0 \bar{\nabla} \cdot (\bar{H} \bar{H}) - (\bar{\nabla} \cdot \mu_0 \bar{H}) \bar{H} - \frac{1}{2} \mu_0 \bar{\nabla} H^2 + \bar{\nabla} \cdot (\mu_0 \bar{M} \bar{H}) - (\bar{\nabla} \cdot \mu_0 \bar{M}) \bar{H}$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \left(\bar{B} \bar{H} - (\bar{\nabla} \cdot \bar{B}) \bar{H} - \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \bar{I} \right)$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \left(\bar{B} \bar{H} - \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \bar{I} \right) \quad (\text{A.7})$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \bar{T}_c \quad (\text{A.8})$$

zodat de tensor $\bar{\bar{T}}_c$ gegeven wordt door:

$$\bar{\bar{T}}_c = \bar{B}\bar{H} - \frac{1}{2}\mu_0 H^2 \bar{\bar{I}} \quad (\text{A.9})$$

De koppeldichtheid, afgeleid van het koppel uitgeoefend op een elementaire dipool in de vrije ruimte, wordt gegeven door:

$$\bar{c}_c = \mu_0 \bar{M} \times \bar{H} \quad (\text{A.10})$$

We merken op dat ook deze koppeldichtheid kan afgeleid worden van de tensor $\bar{\bar{T}}_c$, meer bepaald door het antisymmetrisch deel van deze tensor gegeven door:

$$\bar{\bar{T}}_c^{as} = \frac{1}{2} (\bar{\bar{T}}_c + \bar{\bar{T}}_c^r) \quad (\text{A.11})$$

$$= \frac{1}{2} (\bar{B}\bar{H} - \bar{H}\bar{B}) \quad (\text{A.12})$$

$$= \frac{\mu_0}{2} (\bar{M}\bar{H} - \bar{H}\bar{M}) \quad (\text{A.13})$$

In een cartesiaans assenstelsel (x, y, z) worden de elementen van de matrixvoorstelling van het antisymmetrisch deel van $\bar{\bar{T}}_c$ dus gegeven door :

$$\frac{\mu_0}{2} (M_y H_z - M_z H_y) \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\mu_0}{2} (M_z H_x - M_x H_z) \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\mu_0}{2} (M_x H_y - M_y H_x) \quad (\text{A.16})$$

$$(\text{A.17})$$

Deze drie elementen (A.14)-(A.16) zijn op een factor $\frac{1}{2}$ na gelijk aan respectievelijk de x -, y - en z -component van de koppeldichtheid \bar{c}_c (A.10).

Tenslotte wordt de spanning op een randoppervlak als volgt bepaald op basis van de spanningstensor $\bar{\bar{T}}_c$, zie Figuur A.1 :

$$\begin{aligned} \bar{T}_c &= \bar{n} \cdot \left(\bar{B}'\bar{H}' - \frac{1}{2}\mu_0 H'^2 \bar{\bar{I}} \right) - \bar{n} \cdot \left(\bar{B}\bar{H} - \frac{1}{2}\mu_0 \bar{H}^2 \bar{\bar{I}} \right) \\ &= B_n (\bar{H}' - \bar{H}) - \frac{1}{2}\mu_0 (H'^2 - H^2) \bar{n} \\ &= B_n M_n \bar{n} - \frac{1}{2} (-\mu_0 M_n^2 + 2B_n M_n) \bar{n} \\ &= \frac{1}{2}\mu_0 M_n^2 \bar{n} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

A.1.2 Krachtwerking op magnetische lading

De fictieve krachtdichtheid $\bar{f}_{c'}$ wordt afgeleid van de kracht op de magnetische lading die de magnetisatie voorstelt en kan als volgt uitgewerkt worden:

$$\bar{f}_{c'} = \bar{J} \times \mu_0 \bar{H} + \rho_m \bar{H} \quad (\text{A.19})$$

$$= \bar{J} \times \mu_0 \bar{H} - (\bar{\nabla} \cdot \mu_0 \bar{M}) \bar{H} \quad (\text{A.20})$$

$$= (\bar{\nabla} \times \bar{H}) \times \mu_0 \bar{H} + (\bar{\nabla} \cdot \mu_0 \bar{H}) \bar{H}$$

$$= \mu_0 (\bar{H} \cdot \bar{\nabla}) \bar{H} - \frac{1}{2} \mu_0 \bar{\nabla} H^2 + (\bar{\nabla} \cdot \mu_0 \bar{H}) \bar{H}$$

$$= \mu_0 \bar{\nabla} \cdot (\bar{H} \bar{H}) - (\bar{\nabla} \cdot \mu_0 \bar{H}) \bar{H} - \frac{1}{2} \mu_0 \bar{\nabla} H^2 + (\bar{\nabla} \cdot \mu_0 \bar{H}) \bar{H}$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \left(\mu_0 \bar{H} \bar{H} - \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \bar{I} \right) \quad (\text{A.21})$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \bar{T}_{c'} \quad (\text{A.22})$$

met

$$\bar{T}_{c'} = \mu_0 \bar{H} \bar{H} - \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \bar{I} \quad (\text{A.23})$$

De koppeldichtheid is hierbij nul:

$$\bar{c}_{c'} = 0 \quad (\text{A.24})$$

De tensor $\bar{T}_{c'}$ is trouwens symmetrisch.

De kracht op randoppervlakken kan als volgt bepaald worden op basis van de tensor $\bar{T}_{c'}$ (A.23)

:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{c'} &= \bar{n} \cdot \left(\mu_0 \bar{H}' \bar{H}' - \frac{1}{2} \mu_0 H'^2 \bar{I} \right) - \bar{n} \cdot \left(\mu_0 \bar{H} \bar{H} - \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \bar{I} \right) \\ &= \mu_0 H'_n \bar{H}' - \mu_0 H_n \bar{H} - \frac{1}{2} \mu_0 (H'^2 - H^2) \bar{n} \\ &= \mu_0 H_n M_n \bar{n} + \mu_0 M_n \bar{H} + \mu_0 M_n^2 \bar{n} - \frac{1}{2} \mu_0 (2M_n H_n + M_n^2) \bar{n} \\ &= \bar{n} \cdot \mu_0 \bar{M} \bar{H} + \frac{1}{2} \mu_0 M_n^2 \bar{n} \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Ter hoogte van randoppervlakken vertoont de magnetische ladingsdichtheid een singulariteit, m.a.w. een magnetische oppervlakteladingsdichtheid Π_m , gegeven door

$$\Pi_m = \mu_0 M_n \quad (\text{A.26})$$

De kracht op randoppervlakken, m.a.w. de kracht op deze oppervlakteladingsdichtheid, kan dus eveneens als volgt bepaald worden:

$$\bar{T}_{c'} = \Pi_m \left(\frac{\bar{H} + \bar{H}'}{2} \right) \quad (\text{A.27})$$

$$= \mu_0 M_n \left(\bar{H} + \frac{1}{2} M_n \bar{n} \right) \quad (\text{A.28})$$

$$= \bar{n} \cdot \mu_0 \bar{M} \bar{H} + \frac{1}{2} \mu_0 M_n^2 \bar{n} \quad (\text{A.29})$$

A.2 Ampère-model

Analoog als bij het Chu-model kunnen uit het Ampère-model twee fictieve kracht- en koppeldichtheden worden afgeleid, aangeduid met de indices a en a' .

A.2.1 Krachtwerking op dipolen

Uit de kracht en het koppel uitgeoefend op elementaire dipolen kunnen de volgende fictieve kracht- en koppeldichtheid worden afgeleid:

$$\bar{f}_a = \bar{J} \times \bar{B} + (\bar{\nabla} \bar{B}) \cdot \bar{M} \quad (\text{A.30})$$

$$= (\bar{\nabla} \times \bar{H}) \times \bar{B} - (\bar{\nabla} \bar{B}) \cdot \bar{H} + (\bar{\nabla} \bar{B}) \cdot \frac{1}{\mu_0} \bar{B}$$

$$= (\bar{B} \cdot \bar{\nabla}) \bar{H} - (\bar{\nabla} \bar{H}) \cdot \bar{B} - (\bar{\nabla} \bar{B}) \cdot \bar{H} + (\bar{\nabla} \bar{B}) \cdot \frac{1}{\mu_0} \bar{B}$$

$$= \bar{\nabla} \cdot (\bar{B} \bar{H}) - (\bar{\nabla} \cdot \bar{B}) \bar{H} - \bar{\nabla} \cdot (\bar{B} \cdot \bar{H}) + \bar{\nabla} \cdot \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \left[\bar{B} \bar{H} - \left(\bar{B} \cdot \bar{H} - \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) \bar{I} \right] \quad (\text{A.31})$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \left[\bar{B} \bar{H} - \left(\frac{1}{2} \mu_0 H^2 - \frac{1}{2} \mu_0 M^2 \right) \bar{I} \right] \quad (\text{A.32})$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \bar{T}_a \quad (\text{A.33})$$

met

$$\bar{T}_a = \bar{B} \bar{H} - \left(\frac{1}{2} \mu_0 H^2 - \frac{1}{2} \mu_0 M^2 \right) \bar{I} \quad (\text{A.34})$$

en

$$\bar{c}_a = \bar{M} \times \bar{B} \quad (\text{A.35})$$

De koppeldichtheid \bar{c}_a stemt hierbij opnieuw overeen met het antisymmetrisch deel van de tensor \bar{T}_a (A.34).

Uitgaande van de tensor (A.34) kunnen we vervolgens de spanning op randoppervlakken afleiden:

$$\begin{aligned} \bar{T}_a &= \bar{n} \cdot (\bar{B}' \bar{H}' - \bar{B} \bar{H}) - \left[(\bar{B}' \cdot \bar{H}' - \bar{B} \cdot \bar{H}) - \frac{1}{2\mu_0} (B'^2 - B^2) \right] \bar{n} \\ &= +B_n \bar{M}_n - (B_n M_n - \mu_0 M_t H_t) \bar{n} - \frac{1}{2} \mu_0 (M_t^2 + 2M_t H_t) \bar{n} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\mu_0 M_t^2 \bar{n} \quad (\text{A.36})$$

A.2.2 Krachtwerking op magnetiseringsstroom

De fictieve magnetische krachtdichtheid gebaseerd op de krachtwerking op de magnetiseringsstroom \bar{J}_m kan als volgt uitgewerkt worden:

$$\bar{f}_{a'} = \bar{J} \times \bar{B} + \bar{J}_m \times \bar{B} \quad (\text{A.37})$$

$$= (\bar{\nabla} \times \bar{H} + \bar{\nabla} \times \bar{M}) \times \bar{B}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} (\bar{\nabla} \times \bar{B}) \times \bar{B}$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \bar{B} \bar{B} - \frac{1}{2\mu_0} B^2 \bar{I} \right) \quad (\text{A.38})$$

$$= \bar{\nabla} \cdot \bar{T}_{a'} \quad (\text{A.39})$$

met

$$\bar{T}_{a'} = \frac{1}{\mu_0} \bar{B} \bar{B} - \frac{1}{2\mu_0} B^2 \bar{I} \quad (\text{A.40})$$

De fictieve koppeldichtheid is hierbij gelijk aan nul, wat overeenkomt met de symmetrie van de tensor $\bar{T}_{a'}$:

$$\bar{c}_{a'} = 0 \quad (\text{A.41})$$

Verder wordt de spanning op randoppervlakken afgeleid van de tensor $\bar{T}_{a'}$ (A.40):

$$\begin{aligned} \bar{T}_{a'} &= \frac{1}{\mu_0} \left[\bar{n} \cdot (\bar{B}' \bar{B}' - \frac{1}{2} B'^2 \bar{I}) - \bar{n} \cdot (\bar{B} \bar{B} - \frac{1}{2} B^2 \bar{I}) \right] \\ &= -\bar{n} \cdot \bar{B} (\bar{M} - \bar{M}_n) + \bar{B} \cdot (\bar{M} - \bar{M}_n) \bar{n} - \frac{1}{2} \mu_0 M_t^2 \bar{n} \\ &= -\bar{n} \cdot \bar{B} \bar{M} + \bar{n} \cdot \bar{B} \bar{M}_n + (\bar{B} \cdot \bar{M}) \bar{n} - (\bar{B} \cdot \bar{M}_n) \bar{n} - \frac{1}{2} \mu_0 M_t^2 \bar{n} \\ &= -\bar{n} \cdot \bar{B} \bar{M} + (\bar{B} \cdot \bar{M}) \bar{n} - \frac{1}{2} \mu_0 M_t^2 \bar{n} \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Deze spanning op randoppervlakken kan ook afgeleid worden van de kracht op de magnetiseringsstroomlaag \bar{K}_m ter hoogte van het randoppervlak, gegeven door:

$$\bar{K}_m = \bar{M} \times \bar{n} \quad (\text{A.43})$$

$$= \bar{M}_t \times \bar{n} \quad (\text{A.44})$$

Met behulp van

$$\bar{B}' = \bar{B} - \mu_0 \bar{M}_t \quad (\text{A.45})$$

$$= \bar{B} - \mu_0 (\bar{M} - \bar{M}_n) \quad (\text{A.46})$$

$$= \bar{B} - \bar{n} \times \mu_0 \bar{K}_m \quad (\text{A.47})$$

kunnen we de kracht op de magnetiseringsstroomlaag \bar{K}_m , m.a.w. de spanning op het randoppervlak, als volgt bepalen:

$$\bar{T}_{a'} = \bar{K}_m \times \left(\frac{\bar{B} + \bar{B}'}{2} \right) \quad (\text{A.48})$$

$$\begin{aligned} &= \bar{K}_m \times \bar{B} - \frac{1}{2}\mu_0 \bar{K}_m \times (\bar{n} \times \bar{K}_m) \\ &= (\bar{M} \times \bar{n}) \times \bar{B} - \frac{1}{2}\mu_0 [(\bar{K}_m \cdot \bar{K}_m) \bar{n} - \bar{K}_m (\bar{K}_m \cdot \bar{n})] \\ &= (\bar{B} \cdot \bar{M}) \bar{n} - \bar{n} \cdot (\bar{B} \bar{M}) - \frac{1}{2}\mu_0 M_t^2 \bar{n} \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

A.3 Overzicht

Tenslotte volgt hier een overzicht van de verschillende tensoren, kracht- en koppeldichtheden en spanningen op randoppervlakken.

$$\bar{T}_c = \bar{B} \bar{H} - \frac{1}{2}\mu_0 H^2 \bar{I} \quad (\text{A.50})$$

$$\bar{f}_c = \bar{\nabla} \cdot \bar{T}_c \quad (\text{A.51})$$

$$= \bar{J} \times \mu_0 \bar{H} + (\mu_0 \bar{M} \cdot \bar{\nabla}) \bar{H} \quad (\text{A.52})$$

$$\bar{c}_c = \mu_0 \bar{M} \times \bar{H} \quad (\text{A.53})$$

$$\bar{T}_c(\bar{n}) = \frac{1}{2}\mu_0 M_n^2 \bar{n} \quad (\text{A.54})$$

$$\bar{T}_{c'} = \mu_0 \bar{H} \bar{H} - \frac{1}{2}\mu_0 H^2 \bar{I} \quad (\text{A.55})$$

$$\bar{f}_{c'} = \bar{\nabla} \cdot \bar{T}_{c'} \quad (\text{A.56})$$

$$= \bar{J} \times \mu_0 \bar{H} - (\bar{\nabla} \cdot \mu_0 \bar{M}) \bar{H} \quad (\text{A.57})$$

$$\bar{c}_{c'} = 0 \quad (\text{A.58})$$

$$\bar{T}_{c'}(\bar{n}) = \bar{n} \cdot \mu_0 \bar{M} \bar{H} + \frac{1}{2}\mu_0 M_n^2 \bar{n} \quad (\text{A.59})$$

$$\bar{T}_a = \bar{B} \bar{H} - \left(\frac{1}{2}\mu_0 H^2 - \frac{1}{2}\mu_0 M^2 \right) \bar{I} \quad (\text{A.60})$$

$$\bar{f}_a = \bar{\nabla} \cdot \bar{T}_a \quad (\text{A.61})$$

$$= \bar{J} \times \bar{B} + (\bar{\nabla} \bar{B}) \cdot \bar{M} \quad (\text{A.62})$$

$$\bar{c}_a = \bar{M} \times \bar{B} \quad (\text{A.63})$$

$$\bar{T}_a(\bar{n}) = -\frac{1}{2}\mu_0 M_t^2 \bar{n} \quad (\text{A.64})$$

$$\bar{T}_{a'} = \frac{1}{\mu_0} \bar{B} \bar{B} - \frac{1}{2\mu_0} B^2 \bar{I} \quad (\text{A.65})$$

$$\bar{f}_{a'} = \bar{\nabla} \cdot \bar{T}_{a'} \quad (\text{A.66})$$

$$= (\bar{J} + \bar{\nabla} \times \bar{M}) \times \bar{B} = \frac{1}{\mu_0} (\bar{\nabla} \times \bar{B}) \times \bar{B} \quad (\text{A.67})$$

$$\bar{c}_{a'} = 0 \quad (\text{A.68})$$

$$\bar{T}_{a'}(\bar{n}) = (\bar{B} \cdot \bar{M}) \bar{n} - \bar{n} \cdot (\bar{B} \bar{M}) - \frac{1}{2} \mu_0 M_t^2 \bar{n} \quad (\text{A.69})$$

Appendix B

Contractie van tensoren

In Hoofdstuk 2 wordt gebruik gemaakt van een minder gebruikelijke bewerking op tensoren die als volgt genoteerd wordt:

$$\bar{\tau} : \bar{\varepsilon} \tag{B.1}$$

Het symbool ':' duidt hierbij op het nemen van het inproduct van twee tensoren, wat terug een tensor oplevert, gevolgd door een 'contractie', zoals hier verder wordt toegelicht aan de hand van een voorbeeld.

Beschouwen we bijvoorbeeld een cartesische tensor van rang 4 waarvan de elementen aangeduid worden met a_{ijkl} waarbij de indices i, j, k en l variëren van 1 tot 3, corresponderend met de x -, y - en z -coördinaten. Bij een contractie worden twee indices (bijvoorbeeld k en l) gelijk gesteld aan een index m en wordt de sommatie over deze index m beschouwd. We bekomen aldus een tensor met een rang die twee lager is dan die van de oorspronkelijke tensor en waarvan de elementen \tilde{a}_{ij} gegeven worden door:

$$\tilde{a}_{ij} = \sum_{m=1}^3 a_{ijmm} \tag{B.2}$$

In het bijzonder geval van een tensor a_{ij} van rang 2 bekomen we door contractie een scalaire grootheid (rang 0), namelijk de som van de diagonaalelementen:

$$\tilde{a} = \sum_{m=1}^3 a_{mm} \tag{B.3}$$

We passen deze contractie nu toe op het inproduct van twee tensoren van rang 2, in casu de spanningstensor $\bar{\tau}$ en de symmetrische rektensor $\bar{\varepsilon}$, die in het beschouwde cartesische assenstelsel gegeven worden door:

$$[\tau] = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \tag{B.4}$$

en

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Als we de matrices $[\tau]$ en $[\varepsilon]$ met elkaar vermenigvuldigen, wat overeenkomt met het zgn. inproduct van de tensoren $\bar{\tau} \cdot \bar{\varepsilon}$, en dan een contractie toepassen, m.a.w. de som van de diagonaalelementen nemen, bekomen we het volgende resultaat:

$$\bar{\tau} : \bar{\varepsilon} = \tau_{xx}\varepsilon_{xx} + \tau_{yy}\varepsilon_{yy} + \tau_{zz}\varepsilon_{zz} + (\tau_{xy} + \tau_{yx})\varepsilon_{xy} + (\tau_{yz} + \tau_{zy})\varepsilon_{yz} + (\tau_{zx} + \tau_{xz})\varepsilon_{zx} \quad (\text{B.6})$$

Een tweede toepassing van de ':'-operator is de formulering van lineaire betrekkingen tussen de elementen van twee tensoren. Bijvoorbeeld de wet van Hooke dat het verband aangeeft tussen de rektensor $\bar{\varepsilon}$ en de mechanische spanningstensor $\bar{\tau}$ in (niet-gemagnetiseerd) elastisch materiaal kunnen we als volgt noteren:

$$\bar{\tau} = \bar{\varepsilon} : \bar{E} \quad (\text{B.7})$$

waarbij $\bar{\tau}$ en $\bar{\varepsilon}$ symmetrisch zijn en waarbij de elasticiteitstensor \bar{E} een symmetrische cartesiaanse tensor van rang 4 is waarvan de matrixvoorstelling $[E]$ gegeven wordt door:

$$[E] = \begin{bmatrix} e_{xxxx} & e_{xxxy} & e_{xxzx} & e_{xyxx} & e_{xyxy} & e_{xyzx} & e_{zxxx} & e_{zxxxy} & e_{zxzx} \\ e_{xxxy} & e_{xxyy} & e_{xxyz} & e_{xyxy} & e_{xyyy} & e_{xyyz} & e_{zxxxy} & e_{zxyyy} & e_{zxyyz} \\ e_{xxzx} & e_{xxyz} & e_{xxzz} & e_{xyzx} & e_{xyyz} & e_{xyzz} & e_{zxzx} & e_{zxyyz} & e_{zxzz} \\ e_{xyxx} & e_{xyxy} & e_{xyzx} & e_{yyxx} & e_{yyxy} & e_{yyzx} & e_{yzyxx} & e_{yzyxy} & e_{yzyzx} \\ e_{xyxy} & e_{xyyy} & e_{xyyz} & e_{yyxy} & e_{yyyy} & e_{yyyz} & e_{yzyxy} & e_{yzyyy} & e_{yzyyz} \\ e_{xyzx} & e_{xyyz} & e_{xyzz} & e_{yyzx} & e_{yyyz} & e_{yyzz} & e_{yzyzx} & e_{yzyyz} & e_{yzyzz} \\ e_{zxxx} & e_{zxxxy} & e_{zxzx} & e_{yzxx} & e_{yzxy} & e_{yzzx} & e_{zzxxx} & e_{zzxxy} & e_{zzzx} \\ e_{zxxxy} & e_{zxyyy} & e_{zxyyz} & e_{yzxy} & e_{yzyy} & e_{yzyz} & e_{zzxxy} & e_{zzxyy} & e_{zzxyz} \\ e_{zxzx} & e_{zxyyz} & e_{zxzz} & e_{yzzx} & e_{yzyz} & e_{yzyz} & e_{zzzx} & e_{zzzy} & e_{zzzz} \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

In matrixnotatie wordt (B.7) geschreven als:

$$[\tau] = [\varepsilon] : [E] \quad (\text{B.9})$$

De matrix $[\tau]$ wordt bekomen door de rektensor $[\bar{\varepsilon}]$ te vermenigvuldigen met iedere 3×3 deelmatrix van $[E]$ en telkens een contractie toe te passen, m.a.w. door toepassing van de ':'-operator.

Dit levert de volgende lineaire verbanden op tussen de elementen van de spanningstensor en die van de rektensor:

$$\tau_{xx} = e_{xxxx}\varepsilon_{xx} + e_{xxyy}\varepsilon_{yy} + e_{xxzz}\varepsilon_{zz} + 2e_{xxxy}\varepsilon_{xy} + 2e_{xxyz}\varepsilon_{yz} + 2e_{xxzx}\varepsilon_{zx} \quad (\text{B.10})$$

$$\tau_{xy} = e_{xyxx}\varepsilon_{xx} + e_{xyyy}\varepsilon_{yy} + e_{xyzz}\varepsilon_{zz} + 2e_{xyxy}\varepsilon_{xy} + 2e_{xyyz}\varepsilon_{yz} + 2e_{xyzx}\varepsilon_{zx} \quad (\text{B.11})$$

...

Bij isotroop materiaal wordt het elastisch gedrag beschreven aan de hand van de volgende elastische constanten:

- E : elasticiteitsmodulus van Young (N/m²)
- ν : coëfficiënt van Poisson (-)
- G : glijdingsmodulus (N/m²)

met

$$2G = \frac{E}{1 + \nu} \quad (\text{B.12})$$

zodat er slechts twee onafhankelijke elastische constanten zijn.

De elementen van de elasticiteitstensor $\bar{\bar{E}}$ worden in dit geval gegeven door:

$$e_{xxxx} = e_{yyyy} = e_{zzzz} = \frac{2G(1 - \nu)}{1 - 2\nu} \quad (\text{B.13})$$

$$e_{xxyy} = e_{xxzz} = e_{yyxx} = e_{yyzz} = e_{zzxx} = e_{zzyy} = \frac{2G\nu}{1 - 2\nu} \quad (\text{B.14})$$

$$e_{xyxy} = e_{yzyz} = e_{zxzx} = 2G \quad (\text{B.15})$$

waarbij alle andere elementen gelijk zijn aan nul.

Appendix C

Principe van de virtuele arbeid

Voor de berekening van de totale kracht en het totaal moment die uitgeoefend worden op een magnetische lichaam wordt vaak beroep gedaan op het principe van de virtuele arbeid. Deze methode kan uitgebreid worden voor het berekenen van de totale magnetische langeafstandskrachtwerking op een deel van een magnetisch lichaam door het beschouwde deel van de rest van het magnetisch materiaal af te zonderen door middel van een denkbeeldige snede. Het principe van de virtuele arbeid kan als volgt aangetoond worden.

Beschouwen we het magnetisch materiaal \bar{M}_1 in een volume V_1 , omsloten door het oppervlak S_1 , dat fysisch of denkbeeldig gescheiden is van de rest van het magnetisch materiaal \bar{M}_2 . We wensen nu de totale kracht en het totaal moment op het magnetisch materiaal \bar{M}_1 te bepalen.

Uit (2.175)-(2.176) volgt dat de arbeid geleverd door de spanningsbronnen gegeven wordt door:

$$\delta W_e = \int_{V_\infty} d\left(\frac{\mu_0}{2} H^2\right) dv + \int_{V_1} \mu_0 \bar{H} \cdot d\bar{M}_1 dv + \int_{V_2} \mu_0 \bar{H} \cdot d\bar{M}_2 dv \quad (\text{C.1})$$

De energie δW_m^c opgenomen door het magnetisch materiaal in V_1 kan volgens (2.205) als volgt uitgedrukt worden:

$$\int_{V_1} \mu_0 \bar{H} \cdot d\bar{M}_1 dv = \delta W_m^c \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} &= \int_{V_1} \mu_0 \bar{H} \cdot d_m \bar{M}_s dm \\ &\quad + \int_{V_1} \bar{f}_c \cdot d\bar{u} dv + \oint_{S_1} \bar{T}_c(\bar{n}) \cdot d\bar{u} ds + \int_{V_1} \bar{c}_c \cdot d\bar{\theta} dv \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

We beschouwen nu een beweging als star lichaam van het materiaal in V_1 , waarbij de verplaatsing buiten V_1 gelijk aan nul is. Hierbij verandert de dichtheid ρ van het materiaal niet zodat:

$$d_m \bar{M}_s dm = d_m \left(\frac{\bar{M}}{\rho}\right) dm = d_m \bar{M} dv \quad (\text{C.4})$$

De arbeid dW_e geleverd door de spanningsbronnen neemt in dit geval de volgende vorm aan:

$$dW_e = \int_{V_\infty} d\left(\frac{\mu_0}{2}H^2\right) dv + \int_{V_\infty} \mu_0 \bar{H} \cdot d_m \bar{M} dv + \int_{V_1} \bar{f}_c \cdot d\bar{u} dv + \oint_{S_1} \bar{T}_c(\bar{n}) \cdot d\bar{u} ds + \int_{V_1} \bar{c}_c \cdot d\bar{\theta} dv \quad (\text{C.5})$$

De beweging van V_1 als star lichaam kan bestaan uit een translatie en/of een rotatie.

Ten eerste worden bij een virtuele lineaire beweging $d\bar{u}_0$ (translatie) de verplaatsing $d\bar{u}$ en de rotatie $d\bar{\theta}$ in V_1 gegeven door:

$$d\bar{u} = d\bar{u}_0 \quad (\text{C.6})$$

$$d\bar{\theta} = 0 \quad (\text{C.7})$$

De arbeid dW_e geleverd bij deze virtuele verplaatsing wordt gegeven door:

$$dW_e = \int_{V_\infty} d\left(\frac{\mu_0}{2}H^2\right) dv + \int_{V_\infty} \bar{H} \cdot d_m \bar{M} dv + \left(\int_{V_1} \bar{f}_c dv + \oint_{S_1} \bar{T}_c(\bar{n}) ds \right) \cdot d\bar{u}_0 \quad (\text{C.8})$$

Aangezien de totale magnetische kracht \bar{F} inwerkend op V_1 kan bepaald worden door integratie van de fictieve krachtdichtheden \bar{f}_c en \bar{T}_c volgens:

$$\bar{F} = \int_{V_1} \bar{f}_c dv + \oint_{S_1} \bar{T}_c(\bar{n}) ds \quad (\text{C.9})$$

bekomen we tenslotte de volgende vergelijking:

$$dW_e = \int_{V_\infty} d\left(\frac{\mu_0}{2}H^2\right) dv + \int_{V_\infty} \bar{H} \cdot d_m \bar{M} dv + \bar{F} \cdot d\bar{u}_0 \quad (\text{C.10})$$

Ten tweede worden bij een virtuele rotatie $d\bar{\theta}_0$ rond een punt O dat we als oorsprong kiezen de verplaatsing en de rotatie in V_1 gegeven door:

$$d\bar{u} = d\bar{\theta}_0 \times \bar{r} \quad (\text{C.11})$$

$$d\bar{\theta} = d\bar{\theta}_0 \quad (\text{C.12})$$

Uit de arbeid die hierbij door de spanningsbronnen geleverd wordt gegeven door :

$$dW_e = \int_{V_\infty} d\left(\frac{\mu_0}{2}H^2\right) dv + \int_{V_\infty} \bar{H} \cdot d_m \bar{M}_s dm + d\bar{\theta}_0 \cdot \left(\int_{V_1} \bar{r} \times \bar{f}_c dv + \oint_{S_1} \bar{r} \times \bar{T}_c(\bar{n}) ds + \int_{V_1} \bar{c}_c dv \right) \quad (\text{C.13})$$

en de uitdrukking voor het moment van de magnetische krachtwerking om het punt O :

$$\bar{L} = \int_{V_1} \bar{r} \times \bar{f}_c \, dv + \oint_{S_1} \bar{r} \times \bar{T}_c(\bar{n}) \, ds + \int_{V_1} \bar{c}_c \, dv \quad (\text{C.14})$$

bekomen we de volgende vergelijking:

$$\bar{d}W_e = \int_{V_\infty} d\left(\frac{\mu_0}{2}H^2\right) \, dv + \int_{V_\infty} \mu_0\bar{H} \cdot d_m\bar{M} \, dv + \bar{L} \cdot d\bar{\theta}_0 \quad (\text{C.15})$$

In het geval van niet-hysteretisch materiaal wordt bij niet-bewegende middenstoffen de geleverde arbeid $\bar{d}W_e$ opgeslagen als magnetostatische energie W :

$$\bar{d}W_e = \int_{V_\infty} d\left(\frac{\mu_0}{2}H^2\right) \, dv + \int_{V_\infty} \mu_0\bar{H} \cdot d\bar{M} \, dv \quad (\text{C.16})$$

$$= dW \quad (\text{C.17})$$

$$= \int_{V_\infty} dw \, dv \quad (\text{C.18})$$

De magnetostatische energie W wordt bijgevolg gegeven door:

$$W = \int_{V_\infty} w \, dv \quad (\text{C.19})$$

met w de magnetostatische energiedichtheid gegeven door:

$$w = \frac{1}{2}\mu_0H^2 + \int_0^{\bar{M}} \mu_0\bar{H} \cdot d\bar{M} = \int_0^{\bar{B}} \bar{H} \cdot d\bar{B} \quad (\text{C.20})$$

Bij bewegende middenstoffen wordt de variatie van de magnetostatische energie aldus gegeven door:

$$dW = \int_{V_\infty} d\left(\frac{\mu_0}{2}H^2\right) \, dv + \int_{V_\infty} \mu_0\bar{H} \cdot d_m\bar{M} \, dv \quad (\text{C.21})$$

waarbij de variatie van de magnetisatie ($d_m\bar{M}$) uitgedrukt wordt ten opzichte van een meebewegende waarnemer.

Uit de vergelijkingen (C.10) en (C.15) en de uitdrukking voor de variatie van de magnetostatische energie (C.21) volgt het principe van de virtuele arbeid :

$$\bar{d}W_e = dW + \bar{F} \cdot d\bar{u}_0 \quad (\text{C.22})$$

$$\bar{d}W_e = dW + \bar{L} \cdot d\bar{\theta}_0 \quad (\text{C.23})$$

waarbij de magnetostatische energie W gegeven wordt door (C.19)-(C.20).

Bij hysteretisch materiaal moet bovendien de gedissipeerde energie $\dot{\mathcal{Q}}$ beschouwd worden, waarbij geldt:

$$dW + \dot{\mathcal{Q}} = \int_{V_\infty} d\left(\frac{\mu_0}{2}H^2\right) dv + \int_{V_\infty} \mu_0 \bar{H} \cdot d_m \bar{M} dv \quad (\text{C.24})$$

zodat in dit geval in de rechterleden van (C.22) en (C.23) de term $\dot{\mathcal{Q}}$ moet toegevoegd worden.

Het principe van de virtuele arbeid (C.22)-(C.23) laat dus toe de totale kracht \bar{F} en het totaal moment \bar{L} te bepalen door het beschouwen van respectievelijk een virtuele translatie $d\bar{u}_0$ en een virtuele rotatie $d\bar{\theta}_0$ en de daarmee gepaard gaande arbeid geleverd door de spanningsbronnen $\dot{\mathcal{W}}_e$ en de verandering van de magnetostatische energie van het systeem dW .

We hebben hier het principe van de virtuele arbeid aangetoond op basis van de uitdrukkingen (C.9) en (C.14) voor de totale kracht en het totaal moment die steunen op de fictieve krachtenverdeling volgens het Chu-model. In §2.3.3 werd aangetoond dat de berekeningswijze volgens (C.9) en (C.14) equivalent is met de (veralgemeende) spanningen van Maxwell. Hieruit kunnen we besluiten dat het principe van de virtuele arbeid (C.22)-(C.23) en de spanningen van Maxwell equivalent zijn voor het bepalen van de totale magnetische krachtwerking op een magnetische lichaam, of van de langeafstandskrachtwerking op een deel van een magnetische lichaam.

Tenslotte merken we op dat in de praktijk het principe van de virtuele arbeid meestal als volgt wordt toegepast. We beschouwen voor de eenvoud het geval waarbij de elektrische stroom vloeit in een aantal stroomkringen met stroom I_i . De arbeid geleverd door de spanningsbronnen is dan gelijk aan:

$$\dot{\mathcal{W}}_e = \sum_i I_i d\Psi_i \quad (\text{C.25})$$

met Ψ_i de flux gekoppeld met stroomkring i .

Men beschouwt een virtuele verplaatsing dr van het beschouwde lichaam volgens de richting r waarbij men de flux gekoppeld met de spanningsbronnen Ψ_i constant houdt, zodat de arbeid geleverd door de spanningsbronnen nul is ($\dot{\mathcal{W}}_e = 0$). Uit C.22 volgt dan de kracht in de r -richting:

$$F_r = -\left.\frac{dW}{dr}\right|_{\Psi_i=\text{cst.}} \quad (\text{C.26})$$

Verder definieert men de coënergie W_{co} als volgt:

$$W_{co} = W - \sum_i I_i \Psi_i \quad (\text{C.27})$$

Als men bij de virtuele verplaatsing de stroom in de stroomkringen constant houdt, bekomt men volgens (C.22), (C.25) en C.27 de volgende uitdrukking van de kracht F_r :

$$F_r = \left.\frac{dW_{co}}{dr}\right|_{I_i=\text{cst.}} \quad (\text{C.28})$$

Voor de berekening van het moment L om een bepaalde as kan men analoge uitdrukkingen opstellen:

$$L = -\left.\frac{dW}{d\theta}\right|_{\Psi_i=\text{cst.}} \quad (\text{C.29})$$

$$= \left.\frac{dW_{co}}{d\theta}\right|_{l_i=\text{cst.}} \quad (\text{C.30})$$

met $d\theta$ een virtuele verdraaiing rond de beschouwde as.

Appendix D

Magnetische energie

We beschouwen een materiaal waarbij er een éénduidig verband bestaat tussen het magnetische moment per massa-eenheid \bar{M}_s en de magnetische veldsterkte \bar{H} gegeven door de susceptibiliteit $\bar{\chi}$:

$$\bar{M}_s = \bar{\chi}(\bar{H}) \cdot \bar{H} \quad (\text{D.1})$$

en door de overeenkomstige differentiële susceptibiliteit $\bar{\chi}_d$:

$$d\bar{M}_s = \bar{\chi}_d(\bar{H}) \cdot d\bar{H} \quad (\text{D.2})$$

In deze appendix wordt aangetoond dat de opgenomen energie¹ $\mu_0 \bar{H} \cdot d\bar{M}_s$ een totale differentiaal vormt, m.a.w. als de variatie van een energiedichtheid du_{mag}^c kan beschouwd worden, als en slechts als de differentiële susceptibiliteit $\bar{\chi}_d$ symmetrisch is:

$$\mu_0 \bar{H} \cdot d\bar{M}_s = du_{mag}^c \Leftrightarrow \bar{\chi}_d \text{ is symmetrisch} \quad (\text{D.3})$$

Stellen we nu dat $\mu_0 \bar{H} \cdot d\bar{M}_s$ een totale differentiaal vormt:

$$\mu_0 \bar{H} \cdot d\bar{M}_s = du_{mag}^c \quad (\text{D.4})$$

waarbij de energiedichtheid u_{mag}^c een functie van \bar{H} is.

Met behulp van

$$d\bar{M}_s = \bar{\chi}_d(\bar{H}) \cdot d\bar{H} \quad (\text{D.5})$$

kunnen we de variatie van de energiedichtheid $du_{mag}^c(\bar{H})$ als volgt noteren:

$$du_{mag}^c(\bar{H}) = \mu_0 \bar{H} \cdot d\bar{M}_s \quad (\text{D.6})$$

$$= \mu_0 \bar{H} \cdot \bar{\chi}_d(\bar{H}) \cdot d\bar{H} \quad (\text{D.7})$$

¹Voor de eenvoud beschouwen we hier enkel niet-bewegende middenstoffen. Bij bewegende middenstoffen is de door het materiaal opgenomen energie gelijk aan $\mu_0 \bar{H} \cdot d_m \bar{M}_s$, waarbij d_m de variatie ten opzichte van een meebewegende waarnemer voorstelt.

Het verschil van de magnetische energiedichtheid voor twee waarden van \vec{H} , nl. \vec{H}_1 en \vec{H}_2 wordt bijgevolg gegeven door:

$$u_{mag}^c(\vec{H}_2) - u_{mag}^c(\vec{H}_1) = \int_{\vec{H}_1}^{\vec{H}_2} \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{\chi}_d(\vec{H}) \cdot d\vec{H} \quad (\text{D.8})$$

Aangezien $u_{mag}^c(\vec{H})$ voor ieder waarde van \vec{H} éénduidig bepaald is, is het rechterlid van (D.8), $\int_{\vec{H}_1}^{\vec{H}_2} \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{\chi}_d(\vec{H}) \cdot d\vec{H}$, onafhankelijk van het gevolgde traject tussen de toestanden \vec{H}_1 en \vec{H}_2 . Voor een willekeurige gesloten contour in de driedimensionale \vec{H} -ruimte geldt bijgevolg:

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{\chi}_d(\vec{H}) \cdot d\vec{H} = 0 \quad (\text{D.9})$$

Omgekeerd kunnen we als $\int_{\vec{H}_1}^{\vec{H}_2} \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{\chi}_d(\vec{H}) \cdot d\vec{H}$ onafhankelijk is van het gevolgde traject in de \vec{H} -ruimte, en dus (D.9) geldt voor een willekeurige gesloten contour, een energiefunctie $u_{mag}^c(\vec{H})$ definiëren met

$$du_{mag}^c(\vec{H}) = \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{\chi}_d(\vec{H}) \cdot d\vec{H} = \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{M}_s \quad (\text{D.10})$$

De stelling (D.3) kan dus bewezen worden door aan te tonen dat de contourintegraal (D.9) nul is voor een willekeurige gesloten contour als en slechts als $\vec{\chi}_d(\vec{H})$ symmetrisch is.

In analogie met de $\vec{\nabla}$ -operator wordt de $\vec{\nabla}_H$ -operator gedefinieerd die de partiële afgeleiden naar de componenten van \vec{H} voorstelt:

$$\vec{\nabla}_H \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial H_x} & \frac{\partial}{\partial H_y} & \frac{\partial}{\partial H_z} \end{array} \right] \quad (\text{D.11})$$

zodat we $\vec{\chi}_d$ als volgt kunnen noteren:

$$\vec{\chi}_d = (\vec{\nabla}_H \vec{M}_s)^\top \quad (\text{D.12})$$

De contourintegraal van (D.9) wordt dan als volgt uitgewerkt:

$$\begin{aligned} \oint \vec{H} \cdot \vec{\chi}_d(\vec{H}) \cdot d\vec{H} &= \oint \vec{H} \cdot (\vec{\nabla}_H \vec{M}_s)^\top \cdot d\vec{H} \\ &= \oint [(\vec{\nabla}_H \vec{M}_s) \cdot \vec{H}] \cdot d\vec{H} \\ &= \int_S \vec{\nabla}_H \times [(\vec{\nabla}_H \vec{M}_s) \cdot \vec{H}] \cdot \vec{n} \, ds \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Het contourintegraal is nul voor een willekeurige integraal als en slechts als het integrandum van (D.13) steeds nul is:

$$\vec{\nabla}_H \times [(\vec{\nabla}_H \vec{M}_s) \cdot \vec{H}] = 0 \quad (\text{D.14})$$

$$\Leftrightarrow \bar{\nabla}_H \times [\bar{\nabla}_H (\bar{M}_s \cdot \bar{H}) - (\bar{\nabla}_H \bar{H}) \cdot \bar{M}] = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 - \bar{\nabla}_H \times (\bar{I} \cdot \bar{M}_s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{\nabla}_H \times \bar{M}_s = 0 \tag{D.15}$$

$$\Leftrightarrow \bar{\nabla}_H \bar{M}_s \text{ is symmetrisch} \tag{D.16}$$

$$\Leftrightarrow \bar{\chi}_d(\bar{H}) \text{ is symmetrisch} \tag{D.17}$$

Hierdoor is de stelling bewezen.

Tot slot kunnen we de symmetrie van $\bar{\chi}_d$ als volgt formuleren:

$$\frac{\partial M_{sx}}{\partial H_y} = \frac{\partial M_{sy}}{\partial H_x} \quad ; \quad \frac{\partial M_{sx}}{\partial H_z} = \frac{\partial M_{sz}}{\partial H_x} \quad ; \quad \frac{\partial M_{sy}}{\partial H_z} = \frac{\partial M_{sz}}{\partial H_y} \tag{D.18}$$

Appendix E

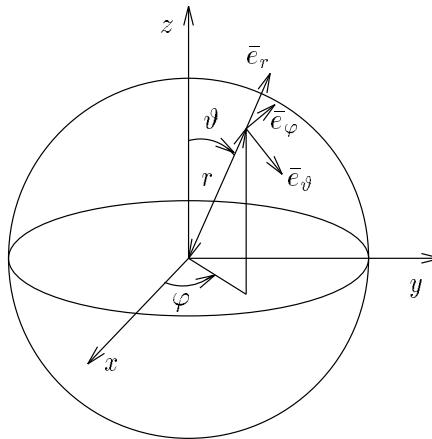
Elastische energiedichtheid van gemagnetiseerd materiaal

In deze appendix wordt de arbeid berekend die de spanningen $\bar{\tau}(\bar{n})$ leveren bij een willekeurige infinitesimale vervorming $\delta\bar{\epsilon}$ om aldus een uitdrukking voor de elastische energiedichtheid te bekomen.

Volgens (2.129) wordt in gemagnetiseerd materiaal $\bar{\tau}(\bar{n})$ gegeven door

$$\bar{\tau}(\bar{n}) = \bar{n} \cdot \bar{\tau}_c - \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \bar{n} \quad , \quad (\text{E.1})$$

Men beschouwt hiertoe een sfeertje met infinitesimale straal r_0 rond een punt in het materiaal, dat men onderwerpt aan een willekeurige virtuele rek $\delta\bar{\epsilon}$ gekenmerkt door $\delta\epsilon_{xx}$, $\delta\epsilon_{yy}$, $\delta\epsilon_{zz}$, $\delta\epsilon_{xy}$, $\delta\epsilon_{yz}$ en $\delta\epsilon_{zx}$. Gezien de infinitesimale afmetingen worden de magnetisatie-dichtheid, de spanningen en de rekken constant verondersteld. Deze grootheden uitgedrukt in een vast cartesiaanse assenstelsel (x, y, z) zijn dus constanten.



Figuur E.1: Bolcoördinaten

Voor de verdere berekeningen gaan we over naar bolcoördinaten, zoals weergegeven in Figuur E.1.

Het verband tussen de matrixvoorstelling $[\delta\varepsilon_{xyz}]$ van de rektensor in cartesiaanse coördinaten en die in bolcoördinaten $[\delta\varepsilon_{r\vartheta\varphi}]$ wordt gegeven door:

$$[\delta\varepsilon_{r\vartheta\varphi}] = [T]^{-1} [\delta\varepsilon_{xyz}] [T] \quad (\text{E.2})$$

waarbij de transformatie matrix $[T]$ gelijk is aan:

$$[T] = \begin{bmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

Na uitwerking levert dit de elementen van de rekmatrix $[\delta\varepsilon_{r\vartheta\varphi}]$ in bolcoördinaten:

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{rr}(\vartheta, \varphi) &= \delta\varepsilon_{xx} \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + 2\delta\varepsilon_{xy} \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + 2\delta\varepsilon_{zx} \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \\ &\quad + \delta\varepsilon_{yy} \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + 2\delta\varepsilon_{yz} \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi + \delta\varepsilon_{zz} \cos^2 \vartheta \\ \delta\varepsilon_{r\vartheta}(\vartheta, \varphi) &= \delta\varepsilon_{xx} \sin \vartheta \cos \vartheta \cos^2 \varphi + 2\delta\varepsilon_{xy} \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi \\ &\quad + \delta\varepsilon_{zx} (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \cos \varphi + \delta\varepsilon_{yy} \sin \vartheta \cos \vartheta \sin^2 \varphi \\ &\quad + \delta\varepsilon_{yz} (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \sin \varphi - \delta\varepsilon_{zz} \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \delta\varepsilon_{r\varphi}(\vartheta, \varphi) &= -\delta\varepsilon_{xx} \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + \delta\varepsilon_{xy} \sin \vartheta (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - \delta\varepsilon_{zx} \cos \vartheta \sin \varphi \\ &\quad + \delta\varepsilon_{yy} \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + \delta\varepsilon_{yz} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \delta\varepsilon_{\vartheta\vartheta}(\vartheta, \varphi) &= \delta\varepsilon_{xx} \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi + 2\delta\varepsilon_{xy} \cos^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi - 2\delta\varepsilon_{zx} \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \\ &\quad + \delta\varepsilon_{yy} \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi - 2\delta\varepsilon_{yz} \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi + \delta\varepsilon_{zz} \sin^2 \vartheta \\ \delta\varepsilon_{\vartheta\varphi}(\vartheta, \varphi) &= -\delta\varepsilon_{xx} \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + \delta\varepsilon_{xy} \cos \vartheta (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \delta\varepsilon_{zx} \sin \vartheta \sin \varphi \\ &\quad + \delta\varepsilon_{yy} \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi - \delta\varepsilon_{yz} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \delta\varepsilon_{\varphi\varphi}(\vartheta, \varphi) &= \delta\varepsilon_{xx} \sin^2 \varphi - 2\delta\varepsilon_{xy} \sin \varphi \cos \varphi + \delta\varepsilon_{yy} \cos^2 \varphi \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Men beschouwt verder het verplaatsingsveld dat met deze rekken overeenstemt en dat enkel de vervorming weergeeft, zonder translatie of rotatie. Bij een zuivere translatie of rotatie is er immers geen vervorming en wordt er dus geen arbeid omgezet in elastische energie. Men kan eenvoudig nagaan dat dit verplaatsingsveld gegeven wordt door:

$$\begin{aligned} \delta u_r(r, \vartheta, \varphi) &= r \delta\varepsilon_{rr}(\vartheta, \varphi) \\ \delta u_{\vartheta}(r, \vartheta, \varphi) &= r \delta\varepsilon_{r\vartheta}(\vartheta, \varphi) \\ \delta u_{\varphi}(r, \vartheta, \varphi) &= r \delta\varepsilon_{r\varphi}(\vartheta, \varphi) \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

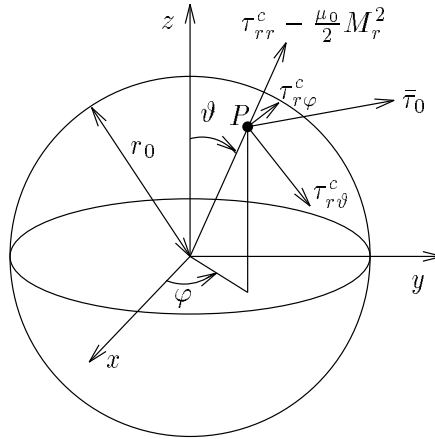
Inderdaad, de verplaatsing van de oorsprong is nul - er is dus geen translatie - en langs de hoofdrichtingen (waar $\delta\varepsilon_{r\vartheta}(\vartheta, \varphi)$ en $\delta\varepsilon_{r\varphi}(\vartheta, \varphi)$ nul zijn) is er enkel een radiale verplaatsing, zodat er ook geen rotatie is. Verder voldoen de rekken (E.4) en de verplaatsingen (E.5) aan de betrekkingen

tussen de rekken en de verplaatsingen in bolcoördinaten, met name :

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial\delta u_r}{\partial r} & ; & \quad 2\delta\varepsilon_{r\vartheta} = \frac{\partial\delta u_{\vartheta}}{\partial r} - \frac{\delta u_{\vartheta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\delta u_r}{\partial\vartheta} \\
\delta\varepsilon_{\vartheta\vartheta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial\delta u_{\vartheta}}{\partial\vartheta} + \frac{\delta u_r}{r} & ; & \quad 2\delta\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial\delta u_r}{\partial\varphi} + \frac{\partial\delta u_{\varphi}}{\partial r} - \frac{\delta u_{\varphi}}{r} \\
\delta\varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial\delta u_{\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\delta u_r}{r} + \frac{\delta u_{\vartheta}}{r} \cotg\vartheta & ; & \quad 2\delta\varepsilon_{\vartheta\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial\delta u_{\varphi}}{\partial\vartheta} - \frac{\delta u_{\varphi}}{r} \cotg\vartheta + \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial\delta u_{\vartheta}}{\partial\varphi}
\end{aligned} \tag{E.6}$$

De verplaatsing $\delta\bar{u}_0$ van het buitenoppervlak van het sfeertje met straal r_0 wordt dus bepaald door:

$$\begin{aligned}
\delta u_{0r}(\vartheta, \varphi) &= r_0 \delta\varepsilon_{rr}(\vartheta, \varphi) \\
\delta u_{0\vartheta}(\vartheta, \varphi) &= r_0 \delta\varepsilon_{r\vartheta}(\vartheta, \varphi) \\
\delta u_{0\varphi}(\vartheta, \varphi) &= r_0 \delta\varepsilon_{r\varphi}(\vartheta, \varphi)
\end{aligned} \tag{E.7}$$



Figuur E.2: Spanning op het buitenoppervlak

Men beschouwt nu de spanning op het buitenoppervlak van het sfeertje, zie Figuur E.2. In een punt $P(\vartheta, \varphi)$ van dit boloppervlak wordt, volgens (E.1), deze spanning $\bar{\tau}_0(\vartheta, \varphi)$ gegeven door:

$$\bar{\tau}_0(\vartheta, \varphi) = \bar{e}_r \cdot \bar{\tau}_c - \frac{\mu_0}{2} M_r^2(\vartheta, \varphi) \bar{e}_r \tag{E.8}$$

waarbij M_r , de component van \bar{M} in de r -richting, gegeven wordt door:

$$M_r(\vartheta, \varphi) = \sin\vartheta \cos\varphi M_x + \sin\vartheta \sin\varphi M_y + \cos\vartheta M_z \tag{E.9}$$

Analoog als bij de rekken kan het gedeelte van de spanning dat afgeleid is van de tensor $\bar{\tau}_c$

met behulp van de transformatiematrix $[T]$ beschreven worden in functie van de elementen van de spanningsmatrix in cartesische coördinaten:

$$\bar{e}_r \cdot \bar{\tau}_c = \tau_{rr}^c(\vartheta, \varphi) \bar{e}_r + \tau_{r\vartheta}^c(\vartheta, \varphi) \bar{e}_\vartheta + \tau_{r\varphi}^c(\vartheta, \varphi) \bar{e}_\varphi \quad (\text{E.10})$$

waarbij

$$\begin{aligned} \tau_{rr}^c(\vartheta, \varphi) &= \tau_{xx}^c \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + (\tau_{xy}^c + \tau_{yx}^c) \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + (\tau_{xz}^c + \tau_{zx}^c) \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \\ &\quad + \tau_{yy}^c \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + (\tau_{yz}^c + \tau_{zy}^c) \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi + \tau_{zz}^c \cos^2 \vartheta \\ \tau_{r\vartheta}^c(\vartheta, \varphi) &= \tau_{xx}^c \sin \vartheta \cos \vartheta \cos^2 \varphi + (\tau_{xy}^c + \tau_{yx}^c) \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi \\ &\quad - \tau_{xz}^c \sin^2 \vartheta \cos \varphi + \tau_{zx}^c \cos^2 \vartheta \cos \varphi \\ &\quad + \tau_{yy}^c \sin \vartheta \cos \vartheta \sin^2 \varphi - \tau_{yz}^c \sin^2 \vartheta \sin \varphi + \tau_{zy}^c \cos^2 \vartheta \sin \varphi - \tau_{zz}^c \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \tau_{r\varphi}^c(\vartheta, \varphi) &= -\tau_{xx}^c \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy}^c \sin \vartheta \cos^2 \varphi - \tau_{yx}^c \sin \vartheta \sin^2 \varphi - \tau_{xz}^c \cos \vartheta \sin \varphi \\ &\quad + \tau_{yy}^c \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{zy}^c \cos \vartheta \cos \varphi \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

De arbeid verricht door de spanningen $\bar{\tau}_0$ bij de beschouwde virtuele rek, bekomt men door integratie van het scalair product van spanning en verplaatsing over het boloppervlak. Deze toegevoerde arbeid, die omgezet wordt in elastische energie, gedeeld door het volume van de sfeer levert uiteindelijk de verandering van de elastische energiedichtheid (energie per volume-eenheid):

$$\begin{aligned} \delta e_{el} &= \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\tau_{rr}^c(\vartheta, \varphi) - \frac{\mu_0}{2} M_r^2(\vartheta, \varphi) \right] \delta u_{0r}(\vartheta, \varphi) \right. \\ &\quad \left. + \tau_{r\vartheta}^c(\vartheta, \varphi) \delta u_{0\vartheta}(\vartheta, \varphi) + \tau_{r\varphi}^c(\vartheta, \varphi) \delta u_{0\varphi}(\vartheta, \varphi) \right\} r_0 d\varphi r_0 \sin \vartheta d\vartheta \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Met behulp van de vergelijkingen (E.7), (E.4), (E.11) en (E.9) bekomt men uiteindelijk het volgende resultaat:

$$\begin{aligned} \delta e_{el} &= \tau_{xx}^c \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{yy}^c \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{zz}^c \delta \varepsilon_{zz} \\ &\quad + (\tau_{xy}^c + \tau_{yx}^c) \delta \varepsilon_{xy} + (\tau_{xz}^c + \tau_{zx}^c) \delta \varepsilon_{zx} + (\tau_{yz}^c + \tau_{zy}^c) \delta \varepsilon_{yz} \\ &\quad - \frac{\mu_0}{10} \left[M^2 (\delta \varepsilon_{xx} + \delta \varepsilon_{yy} + \delta \varepsilon_{zz}) \right] \\ &\quad - \frac{\mu_0}{5} \left(M_x^2 \delta \varepsilon_{xx} + M_y^2 \delta \varepsilon_{yy} + M_z^2 \delta \varepsilon_{zz} + 2M_x M_y \delta \varepsilon_{xy} + 2M_y M_z \delta \varepsilon_{yz} + 2M_z M_x \delta \varepsilon_{zx} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

of als de virtuele grootheden vervangen worden door differentiaties:

$$d e_{el} = \left(\bar{\tau}_c^s - \frac{\mu_0}{10} M^2 \bar{I} - \frac{\mu_0}{5} \bar{M} \bar{M} \right) : d \bar{\varepsilon} \quad (\text{E.14})$$

Dit resultaat is in overeenstemming met de elastische energiedichtheid in de klassieke elasticiteitsleer, m.a.w. zonder magnetisatie en met een symmetrische spanningstensor $\bar{\sigma}$. In dit geval herleidt de uitdrukking (E.14), met als spanningstensor $\bar{\sigma}$ i.p.v. $\bar{\tau}_c$, zich inderdaad tot het 'klassieke' resultaat:

$$de_{el} = \sigma_{xx}d\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}d\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}d\varepsilon_{zz} + 2\sigma_{xy}d\varepsilon_{xy} + 2\sigma_{yz}d\varepsilon_{yz} + 2\sigma_{zx}d\varepsilon_{zx} \quad (\text{E.15})$$

$$= \bar{\sigma} : d\bar{\varepsilon} \quad (\text{E.16})$$

Appendix F

Spanningsvergelijkingen

In deze appendix worden de elektrische netwerkvergelijkingen (spanningsvergelijkingen) afgeleid voor de drie beschouwde topologieën van de statorwikkeling zoals besproken in §4.4.1.2.

Aangezien de netwerkvergelijkingen moeten gelden voor ieder tijdstip, moeten ze bijgevolg ook gelden voor iedere frequentiecomponent afzonderlijk. We beschouwen in deze appendix steeds de componenten met één bepaalde pulsatie ω . De verschillende componenten worden bijgevolg slechts enkel met hun orde aangeduid. Bijvoorbeeld \bar{I}_κ is de complexe waarde van de stroomcomponent met orde κ , en, zoals stilzwijgend ondersteld, met pulsatie ω .

De aangelegde driefasige spanning van de beschouwde pulsatie ω wordt gegeven door \bar{V}_{f_0} , \bar{V}_{f_1} en \bar{V}_{f_2} , respectievelijk de homopolaire, directe en inverse spanning.

Bij driehoekschakeling is de homopolaire spanning nul : $\bar{V}_{f_0} = 0$. Bij een niet-verbonden sterschakeling kan de homopolaire spanning V_{f_0} niet worden opgedrongen. Anderzijds moet de som van de fasestromen in dit geval gelijk aan nul zijn, zodat de homopolaire fasestroom nul is.

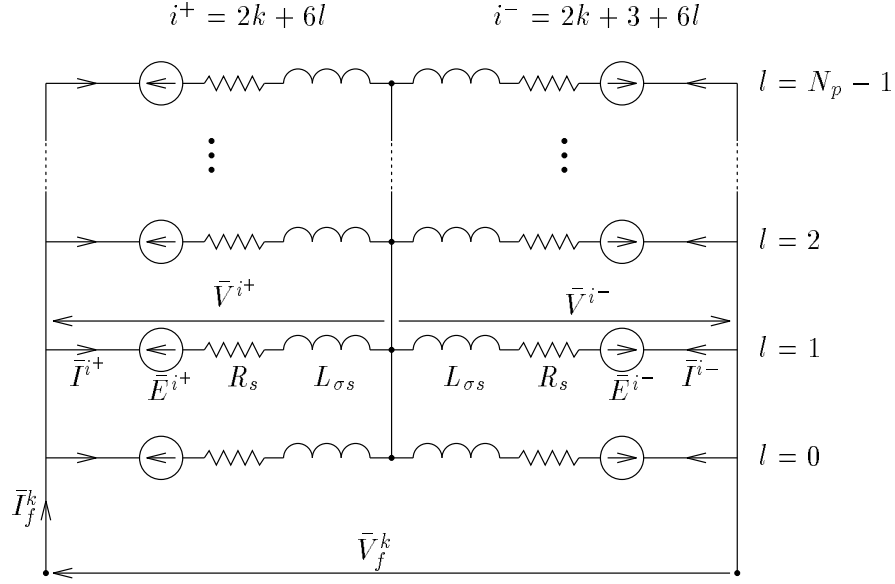
F.1 Parallelschakeling met equipotentiaalverbindingen

Bij parallelschakeling van de spoelgroepen met daarenboven het aanbrengen van equipotentiaalverbindingen wordt de stroomverdeling in de statorwikkeling beschreven aan de hand van de stromen in de elementaire spoelgroepen.

Aangezien er $6N_p$ spoelgroepen zijn nemen de ordes κ van de stroomcomponenten de volgende waarden aan:

$$\kappa = 0, \dots, 6N_p - 1 \tag{F.1}$$

Om de $6N_p$ stroomcomponenten \bar{I}_κ te bepalen in functie van de geïnduceerde spanningen en de aangelegde spanningen, zijn er $6N_p$ lineair onafhankelijke vergelijkingen nodig, die als volgt worden opgesteld.



Figuur F.1: Parallelschakeling van de spoelgroepen met equipotentiaalverbindingen

We beschouwen de verschillende componenten van de spanning \bar{V}^i over de spoelgroepen i :

$$\bar{V}^i = \sum_{\kappa=0}^{6N_p-1} \bar{V}_\kappa e^{-j\kappa \frac{\pi}{3N_p} i} \quad (\text{F.2})$$

met

$$\bar{V}_\kappa = \bar{E}_\kappa + (R_s + j\omega L_{\sigma s}) \bar{I}_\kappa \quad (\text{F.3})$$

Door middel van de equipotentiaalverbindingen zijn per fase de spanningen over de even spoelgroepen aan elkaar gelijk, en de spanningen over de oneven spoelgroepen aan elkaar gelijk. Bijvoorbeeld voor de even spoelgroepen van fase k , gegeven door

$$i^+ = 2k + 6l \quad ; \quad l = 0, \dots, N_p - 1 \quad , \quad (\text{F.4})$$

kunnen we de volgende $N_p - 1$ vergelijkingen neerschrijven:

$$\bar{V}^{2k+6l} = \bar{V}^{2k} \quad ; \quad l = 1, \dots, N_p - 1 \quad (\text{F.5})$$

of, na ontbinding in componenten:

$$\sum_{\kappa=0}^{6N_p-1} \bar{V}_\kappa e^{-j\kappa \frac{\pi}{3N_p} (2k+6l)} = \sum_{\kappa=0}^{6N_p-1} \bar{V}_\kappa e^{-j\kappa \frac{\pi}{3N_p} 2k} \quad ; \quad l = 1, \dots, N_p - 1 \quad (\text{F.6})$$

De spanningen \bar{V}_κ waarvan de orde een veelvoud is van N_p , verdwijnen uit deze vergelijkingen, aangezien de spanningen van deze ordes in de beschouwde spoelgroepen (over een hoek $\frac{2\pi}{N_p}$

verschoven) gelijk zijn:

$$\kappa = aN_p \Rightarrow \bar{V}_\kappa^{2k+6l} = \bar{V}_\kappa e^{-jaN_p \frac{\pi}{3N_p}(2k+6l)} \quad (\text{F.7})$$

$$= \bar{V}_\kappa e^{-j \frac{\pi}{3N_p} 2k} \quad (\text{F.8})$$

$$= \bar{V}_\kappa^{2k} \quad (\text{F.9})$$

Er verdwijnen dus 6 onbekenden, nl. de spanningscomponenten \bar{V}_κ voor $\kappa = 0, N_p, \dots, 5N_p$. Het totaal aantal onbekenden wordt dus teruggebracht tot $6N_p - 6 = 6(N_p - 1)$.

Als we de corresponderende $N_p - 1$ vergelijkingen beschouwen voor de oneven spoelgroepen $i^- = 2k + 3 + 6l$ en dit voor de drie fasen ($k = 0, 1, 2$) bekomen we in totaal $6(N_p - 1)$ vergelijkingen met $6(N_p - 1)$ onbekenden.

De unieke (triviale) oplossing voor dit stelsel vergelijkingen is de nuloplossing, m.a.w.

$$\text{voor } \kappa \neq aN_p : \bar{V}_\kappa = \bar{E}_\kappa + (R_s + j\omega L_{\sigma s})\bar{I}_\kappa = 0 \quad (\text{F.10})$$

Voor deze ordes wordt de stroom \bar{I}_κ dus rechtstreeks bepaald door de geïnduceerde spanning \bar{E}_κ .

Verder drukken we uit dat de som van de stromen in de even spoelgroepen, die de fasestroom \bar{I}_f^k vormt, en de som van de stromen in de oneven spoelgroepen tegengesteld is:

$$\bar{I}_f^k = \sum_{l=0}^{N_p-1} \bar{I}^{2k+6l} = - \sum_{l=0}^{N_p-1} \bar{I}^{2k+3+6l} \quad (\text{F.11})$$

De bijdrage tot de fasestroom van de verschillende stroomcomponenten wordt gegeven door:

$$\sum_{l=0}^{N_p-1} \bar{I}_\kappa e^{-j\kappa \frac{\pi}{3N_p}(2k+6l)} = \begin{cases} N_p \bar{I}_\kappa e^{-j\kappa \frac{\pi}{3N_p} 2k} & \text{voor } \kappa = aN_p \\ 0 & \text{voor } \kappa \neq aN_p \end{cases} \quad (\text{F.12})$$

De stroomcomponenten met ordes $\kappa \neq aN_p$, die reeds bepaald zijn door de vergelijkingen (F.10), komen dus niet voor in de stroomvergelijking (F.11).

Ook de stroomcomponenten met ordes die een oneven veelvoud van N_p zijn verdwijnen uit vergelijking (F.11) omdat voor deze ordes de stroom in de even spoelgroep $i^+ = 2k + 6l$ tegengesteld is aan de stroom in de corresponderende oneven spoelgroep $i^- = 2k + 3 + 6l$:

$$\kappa = (2a + 1)N_p \Rightarrow \bar{I}_\kappa^{2k+6l} = \bar{I}_\kappa e^{-j(2a+1)N_p \frac{\pi}{3N_p}(2k+6l)} \quad (\text{F.13})$$

$$= -\bar{I}_\kappa e^{-j(2a+1)N_p \frac{\pi}{3N_p}(2k+3+6l)} \quad (\text{F.14})$$

$$= -\bar{I}_\kappa^{2k+3+6l} \quad (\text{F.15})$$

Enkel componenten met ordes $\kappa = 2aN_p$, nl. $\kappa = 0, 2N_p, 4N_p$ blijven over in de vergelijkingen (F.11), die herleid worden tot:

$$\sum_{\kappa=0, 2N_p, 4N_p} \bar{I}_\kappa e^{-j\kappa \frac{\pi}{3N_p} 2k} = \bar{I}_0 + \bar{I}_{2N_p} e^{-j \frac{4\pi}{3} k} + \bar{I}_{4N_p} e^{-j \frac{2\pi}{3} k} \quad (\text{F.16})$$

$$= 0 \quad (\text{F.17})$$

met

$$k = 0, 1, 2 \quad (\text{F.18})$$

Het stelsel gevormd door de drie vergelijkingen voor de fasen $k = 0, 1, 2$ heeft als unieke oplossing:

$$\bar{I}_\kappa = 0 \quad \text{voor} \quad \kappa = 0, 2N_p, 4N_p \quad (\text{F.19})$$

We dienen nu nog de vergelijkingen op te stellen voor de drie nog resterende componenten, nl. voor $\kappa = N_p, 3N_p$ en $5N_p$, die corresponderen met respectievelijk de directe, de homopolaire en de inverse component van de fasespanning:

$$\begin{aligned} \bar{V}_f^k &= \sum_{\kappa=N_p, 3N_p, 5N_p} 2\bar{V}_\kappa e^{-j\kappa \frac{2\pi}{3N_p} k} \\ &= 2\bar{V}_{N_p} e^{-jN_p \frac{2\pi}{3N_p} k} + 2\bar{V}_{3N_p} e^{-j3N_p \frac{2\pi}{3N_p} k} + 2\bar{V}_{5N_p} e^{-j5N_p \frac{2\pi}{3N_p} k} \\ &= 2\bar{V}_{N_p} e^{-j\frac{2\pi}{3} k} + 2\bar{V}_{3N_p} + 2\bar{V}_{5N_p} e^{-j\frac{4\pi}{3} k} \end{aligned} \quad (\text{F.20})$$

Als de aangelegde fasespanning gegeven wordt door

$$\bar{V}_f^k = \bar{V}_{f0} + \bar{V}_{f1} e^{-j\frac{2\pi}{3} k} + \bar{V}_{f2} e^{-j\frac{4\pi}{3} k} \quad (\text{F.21})$$

volgen uit (F.20) de volgende spanningsvergelijkingen voor de drie componenten met $\kappa = N_p, 3N_p$ en $5N_p$:

$$\begin{aligned} 2\bar{V}_{3N_p} &= \bar{V}_{f0} \\ 2\bar{V}_{N_p} &= \bar{V}_{f1} \\ 2\bar{V}_{5N_p} &= \bar{V}_{f2} \end{aligned} \quad (\text{F.22})$$

Uitgedrukt in functie van de corresponderende stroomcomponenten en geïnduceerde spanningen worden deze vergelijkingen als volgt geformuleerd:

$$\text{voor } \kappa = N_p, 3N_p \text{ en } 5N_p : 2(\bar{E}_\kappa + (R_s + j\omega L_{\sigma s}) \bar{I}_\kappa) = \bar{V}_{f\kappa'} \quad (\text{F.23})$$

met

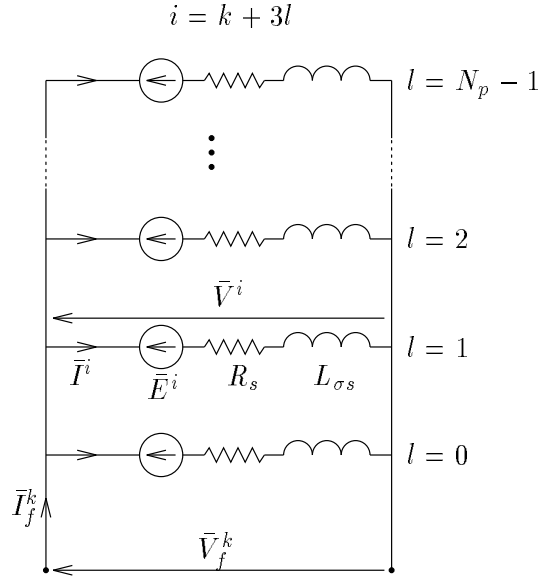
$$\kappa' = \frac{\kappa}{N_p} \text{ modulo } 3 \quad (\text{F.24})$$

Voor driehoekschakeling is homopolaire spanning \bar{V}_{f0} nul. Voor niet-verbonden sterschakeling vervalt de vergelijking voor de homopolaire spanningscomponent. Deze wordt vervangen door de eis dat de homopolaire stroom gelijk is aan nul:

$$\bar{I}_{3N_p} = 0 \quad (\text{F.25})$$

F.2 Parallelschakeling zonder equipotentiaalverbindingen

Indien men de equipotentiaalverbindingen verwijdert, wordt de stroomverdeling in de gleuven volledig bepaald door de stromen in de $3N_p$ spoelgroepen. Het elektrisch netwerk per fase wordt voorgesteld in Figuur F.2. De spanning \bar{V}^i , de stroom \bar{I}^i , de geïnduceerde spanning \bar{E}^i , de weerstand R_s en de spoelkopspreidingsinductantie $L_{\sigma s}$ hebben hier betrekking op een spoelgroep, i.p.v. op een afzonderlijke spoelgroep.



Figuur F.2: Parallelschakeling van de spoelgroepen zonder equipotentiaalverbindingen

Ten eerste drukken we uit dat de spanningen over de parallelle takken van iedere fase gelijk aan elkaar zijn:

$$\bar{V}^{k+3l} = \bar{V}^k \quad ; \quad l = 1, \dots, N_p - 1 \quad ; \quad k = 0, 1, 2 \quad (\text{F.26})$$

Door ontbinding van de spanning in componenten met ordes $\kappa = 0, \dots, 3N_p - 1$ bekomen we de volgende vergelijkingen:

$$\sum_{\kappa=0}^{3N_p-1} \bar{V}_{\kappa} e^{-j\kappa \frac{2\pi}{3N_p}(k+3l)} = \sum_{\kappa=0}^{3N_p-1} \bar{V}_{\kappa} e^{-j\kappa \frac{2\pi}{3N_p}k} \quad ; \quad l = 1, \dots, N_p - 1 \quad ; \quad k = 0, 1, 2 \quad (\text{F.27})$$

Analoog als in vorige paragraaf, verdwijnen de spanningscomponenten met ordes die een veelvoud zijn van N_p , in dit geval $\kappa = 0, N_p, 2N_p$, uit deze vergelijkingen.

De $3(N_p - 1)$ vergelijkingen (F.27) in de $3(N_p - 1)$ componenten waarvan de orde geen veelvoud is van N_p heeft als unieke oplossing de nuloplossing:

$$\text{voor } \kappa \neq aN_p \quad : \quad \bar{V}_{\kappa} = \bar{E}_{\kappa} + (R_s + j\omega L_{\sigma e}) \bar{I}_{\kappa} = 0 \quad (\text{F.28})$$

De drie componenten die wel een veelvoud van N_p zijn, met name de componenten met orde $\kappa = 0, N_p, 2N_p$, worden bepaald door respectievelijk de homopolaire, de directe en de inverse component van de aangelegde fasespanning. Uit gelijkstelling van de fasespanningen gegeven door

$$\begin{aligned}\bar{V}_f^k &= \sum_{\kappa=0, N_p, 2N_p} \bar{V}_\kappa e^{-j\kappa \frac{2\pi}{3N_p} k} \\ &= \bar{V}_0 + \bar{V}_{N_p} e^{-j\frac{2\pi}{3} k} + \bar{V}_{2N_p} e^{-j\frac{4\pi}{3N_p} k}\end{aligned}\tag{F.29}$$

$$\tag{F.30}$$

en de aangelegde spanningen:

$$\bar{V}_f^k = \bar{V}_{f0} + \bar{V}_{f1} e^{-j\frac{2\pi}{3} k} + \bar{V}_{f2} e^{-j\frac{4\pi}{3} k}\tag{F.31}$$

volgt:

$$\begin{aligned}\bar{V}_0 &= \bar{V}_{f0} \\ \bar{V}_{N_p} &= \bar{V}_{f1} \\ \bar{V}_{2N_p} &= \bar{V}_{f2}\end{aligned}\tag{F.32}$$

De componenten met ordes die een veelvoud zijn van N_p worden aldus bepaald door:

$$\text{voor } \kappa = 0, N_p, \text{ en } 2N_p \bar{E}_{kappa} + (R_s + j\omega L_{\sigma s}) \bar{I}_\kappa = \bar{V}_{f\kappa'}\tag{F.33}$$

met

$$\kappa' = \frac{\kappa}{N_p}\tag{F.34}$$

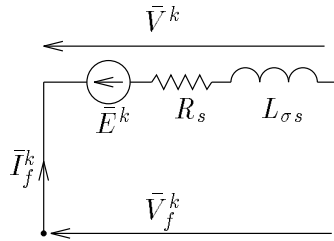
Voor driehoekschakeling of sterschakeling met verbonden neutrale geleider worden de drie spanningscomponenten opgedrongen. Voor niet-verbonden sterschakeling vervalt de vergelijking voor de homopolaire spanningscomponent.

F.3 Serieschakeling

Bij een serieschakeling van alle spoelgroepen toegekend aan een fase worden de elektrische vergelijkingen uitgedrukt in functie van de spanningen en de stromen in een volledige fasewikkeling. De fasespanningen worden gegeven door:

$$\begin{aligned}\bar{V}_f^k &= \sum_{\kappa=0,1,2} \bar{V}_\kappa e^{-j\kappa \frac{2\pi}{3N_p} k} \\ &= \bar{V}_0 + \bar{V}_1 e^{-j\frac{2\pi}{3} k} + \bar{V}_2 e^{-j\frac{4\pi}{3N_p} k}\end{aligned}\tag{F.35}$$

$$\tag{F.36}$$



Figuur F.3: serieschakeling

Bij een driehoekschakeling of verbonden sterschakeling bekomen we de spanningsvergelijkingen door gelijkstelling van de componenten van de fasespanningen met de aangelegde spanning voor de drie ordes 0, 1 en 2:

$$\text{voor } \kappa = 0, 1, 2 : \bar{V}_{f\kappa} = \bar{V}_\kappa = \bar{E}_\kappa + (R_s + j\omega L_{\sigma s}) \bar{I}_\kappa \quad (\text{F.37})$$

Bij een niet-verbonden sterschakeling vervalt de spanningsvergelijking voor de homopolaire spanningscomponent ($\kappa = 0$). Dit wordt vervangen door de eis dat de homopolaire stroom nul is ($\bar{I}_0 = 0$).

Appendix G

Stroom en gekoppelde flux versus m.m.k.-bron en fysische flux

In een magnetisch netwerk worden de stromen in de geleiders weergegeven door middel van m.m.k.-bronnen. In deze appendix wordt het verband tussen enerzijds de stroom en de gekoppelde flux in de stroomkringen en anderzijds het potentiaalverschil en de fysische flux van de m.m.k.-bronnen nader onderzocht.

Eén van de methodes voor het oplossen van netwerkvergelijkingen is de zgn. lussenmethode, zoals bijvoorbeeld uiteengezet in [Willems] voor elektrische netwerken. Voor de hier gebruikte terminologie voor het beschrijven van de netwerktopologie verwijzen we eveneens naar [Willems]. Voor een netwerk met b takken en n knopen kiest men $b-n+1$ onafhankelijke lussen. De fluxen in alle takken van het netwerk worden hierbij uitgedrukt in functie van de lusfluxen van de onafhankelijke lussen zodat de 'stroomwet' van Kirchhoff automatisch voldaan is. Met iedere onafhankelijke lus stemt een 'spanningsvergelijking' overeen volgens de 'spanningswet' van Kirchhoff, d.i. de totale potentiaalval over alle takken van een willekeurige gesloten lus is gelijk aan nul. De m.m.k. van een lus is de som van de potentiaalval over alle reluctanties in de lus en is wegens $\bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J}$ gelijk aan de totale stroom die de lus omsluit. Wegens de spanningswet van Kirchhoff moet bijgevolg voor een lus de som van de potentiaalverschillen van de m.m.k.-bronnen gelijk zijn aan de totale stroom die de lus omsluit. Aangezien de netwerkvergelijkingen herleid kunnen worden tot $b-n+1$ onafhankelijke spanningsvergelijkingen is het nodig en voldoende uit te drukken dat dit verband tussen stroom en m.m.k.-bronnen geldt voor $b-n+1$ onafhankelijke lussen.

We beschouwen nu een planair magnetisch netwerk en kiezen de inwendige mazen als onafhankelijke lussen, zoals aangeduid in het voorbeeld van Figuur G.1, en duiden het aantal onafhankelijke lussen aan met p ($p = b - n + 1$). Verder beschouwen we m spoelen met n_j windingen waarvan de spoelzijden zich bevinden in de mazen van het netwerk, zoals voorgesteld in Figuur G.1. Hierbij is de werkelijke stroomzin aangeduid die overeenstemt met een positieve stroom in de spoelen. Per lus wordt een lusstroom gedefinieerd die gelijk is aan de totale stroom in de lus en waarvan de positieve zin wordt bepaald door de positieve circulatiezin van de lus.

We definiëren nu de $(p \times m)$ -matrix $[D_{ij}]$ zodat

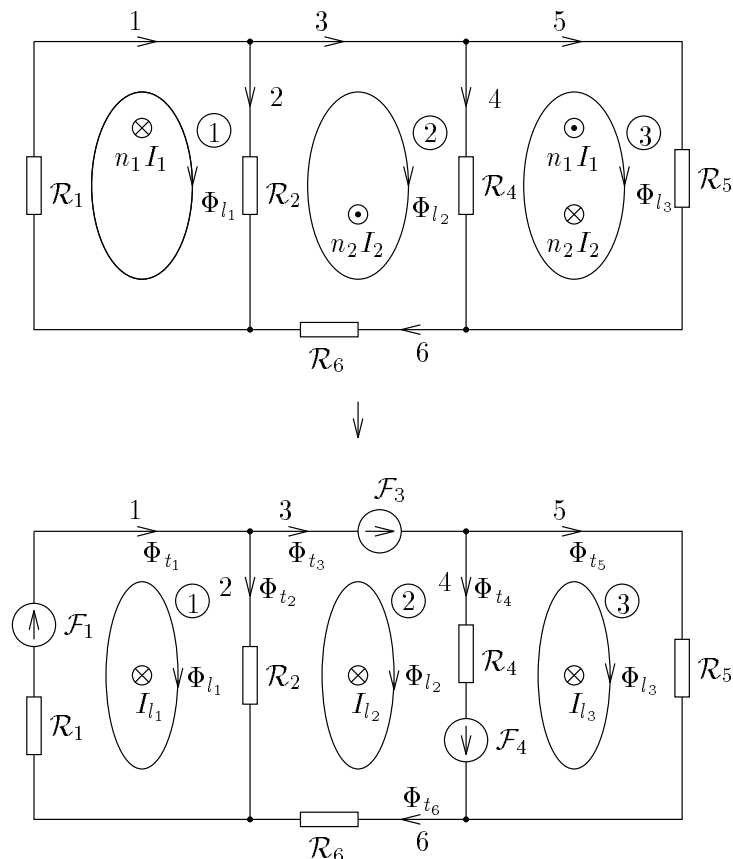
$$\begin{aligned}
 D_{ij} &= 1 && \text{als een positieve stroom in spoel } j \text{ een positieve bijdrage levert} \\
 &&& \text{tot de lusstroom in lus } i \\
 D_{ij} &= -1 && \text{als een positieve stroom in spoel } j \text{ een negatieve bijdrage levert} \\
 &&& \text{tot de lusstroom in lus } i \\
 D_{ij} &= 0 && \text{als een stroom in spoel } j \text{ geen bijdrage levert} \\
 &&& \text{tot de lusstroom in lus } i
 \end{aligned}
 \tag{G.1}$$

De lusstromen I_{l_i} worden aldus gegeven door:

$$I_{l_i} = \sum_{j=1}^m D_{ij} n_j I_j \quad ; \quad i = 1, \dots, p
 \tag{G.2}$$

De flux Ψ_j gekoppeld met de spoelen, waarbij de positieve zin van de flux gekozen wordt in overeenstemming met de positieve zin van de stroom van de spoel, kan aan de hand van de lusfluxen en matrix D_{ij} als volgt bepaald worden:

$$\Psi_j = n_j \sum_{i=1}^p D_{ij} \Phi_{l_i} \quad ; \quad j = 1, \dots, m
 \tag{G.3}$$



Figuur G.1: Magnetisch netwerk

Inderdaad, de lusfluxen in lussen (inwendige mazen) die geen spoelzijde omvatten van een bepaalde spoel j leveren geen bijdrage tot de flux gekoppeld met spoel j . Anderzijds wordt, wegens de correspondentie van de positieve zin van de flux en de overeenkomstige stroom voor zowel de lusfluxen en -stromen als de gekoppelde fluxen en stromen in de spoelen, het teken van de bijdrage van lusfluxen die wel een spoelzijde van spoel j bepaald door $[D_{ij}]$.

Bovenstaande betrekkingen worden verduidelijkt aan de hand van het voorbeeld in Figuur G.1 en de bijbehorende $[D_{ij}]$ -matrix gegeven door:

$$[D_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{G.4})$$

Voor het bepalen van de fluxen in de b geörienteerde takken in functie van de lusfluxen, beschouwen we de connectiematrix $[C_{ik}]$ ($b \times m$), die als volgt gedefinieerd is:

$$\begin{aligned} C_{ik} &= 1 && \text{als lus } i \text{ tak } b \text{ bevat en de positieve zinnen van de tak} \\ &&& \text{en van de lus overeenstemmen} \\ C_{ik} &= -1 && \text{als lus } i \text{ tak } b \text{ bevat en de positieve zinnen van de tak} \\ &&& \text{en van de lus tegengesteld zijn} \\ C_{ik} &= 0 && \text{als lus } i \text{ tak } j \text{ niet bevat} \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

De takfluxen worden bijgevolg gegeven door:

$$\Phi_{t_k} = \sum_{i=1}^p C_{ik} \Phi_{l_i} \quad ; \quad k = 1, \dots, b \quad (\text{G.6})$$

Indien men de referentiezin voor het potentiaalverschil \mathcal{F}_k over de m.m.k.-bronnen kiest in functie van de positieve takzin volgens het G.R.S., volgt uit de bovenstaande redenering dat de potentiaalverschillen over de m.m.k.-bronnen \mathcal{F}_k moeten voldoen aan :

$$\sum_{k=1}^b C_{ik} \mathcal{F}_k = I_{l_i} \quad ; \quad i = 1, \dots, p \quad (\text{G.7})$$

om de stroom in de spoelen correct weer te geven.

Men kan dit opnieuw nagaan aan de hand van het voorbeeld waar de volgende connectiematrix bij hoort:

$$[C_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{G.8})$$

Op basis van bovenstaande betrekkingen tonen we nu aan dat de som van de producten van de stroom en de gekoppelde flux van de spoelen gelijk is aan de som van de producten van het

potentiaalverschil over en de fluxen door de m.m.k.-bronnen:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^m I_j \Psi_j &= \sum_{j=1}^m I_j n_j \left(\sum_{i=1}^p D_{ij} \Phi_{l_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^p \Phi_{l_i} \left(\sum_j n_j D_{ij} n_j I_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^p I_{l_i} \Phi_{l_i} \tag{G.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^b C_{ik} \mathcal{F}_k \Phi_{l_i} \\
&= \sum_{k=1}^b \mathcal{F}_k \sum_{i=1}^p C_{ik} \Phi_{l_i} \\
&= \sum_{k=1}^b \mathcal{F}_k \Phi_{t_k} \tag{G.10}
\end{aligned}$$

Dit impliceert dat de arbeid geleverd door de e.m.k. van de spoelen gelijk is aan de 'arbeid geleverd door de m.m.k.-bronnen':

$$dW_e = \sum_{j=1}^m I_j d\Psi_j = \sum_{k=1}^b \mathcal{F}_k d\Phi_{t_k} \tag{G.11}$$

Referenties

- [Aronson 89] E. A. Aronson, J. R. Brauer, '*Magnetic torque or force calculation by direct differentiation of finite element coenergy*', IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 25, No. 5, Sept. 1989, pp. 3578–3580
- [Belmans 84] R. Belmans, '*Radiale trillingen van driefasige tweepolige inductiemachines met kooianker*', doctoraatsthesis, K.U.Leuven, 1984
- [Belmans 87] R. J. M. Belmans, L. d'Hondt, A. J. Vandenput, W. Geysen, '*Analysis of the audible noise of three-phase squirrel-cage induction motors supplied by inverters*', IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 23, No. 5, Sept./Oct. 1987, pp. 842–846
- [Belmans 91] R. J. M. Belmans, D. Verdyck, W. Geysen, R. D. Findlay, '*Electro-mechanical analysis of the audible noise of an inverter-fed squirrel-cage induction motor*', IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 27, No. 3, May/June 1991, pp. 539–544
- [Binns 64] K. J. Binns, '*Calculation of some basic flux quantities in induction and other doubly-slotted electrical machines*', Proceedings IEE, Vol. 111, No. 11, 1964, pp. 1847–1858
- [Binns 78] K. J. Binns, G. R. Rees, P. A. Kahan, '*The choice of slot combinations in relation to the force pulsations on induction machine teeth*', Proceedings International Conference on Electrical Machines (ICEM), Brussel, Sept. 1978, pp. G4/1-1 – G4/1-10
- [Binns 80] K. J. Binns, P. A. Kahan, '*The influence of slot combinations on the noise-producing forces and losses in induction motors*', Proceedings International Conference on Electrical Machines (ICEM), Athens, Sept. 1980, pp. 1893–1900
- [Benbouzid 93] M. E. H. Benbouzid, G. Reyne, S. Dérou, A. Foggia, '*Finite element modeling of a synchronous machine : electromagnetic forces and mode shapes*', IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 29, No. 2, March 1993, pp. 2014–2018
- [Bolte 84] E. Bolte, '*Analytical calculation of the two-dimensional field in air-gap and slots of electrical machines*', IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 20, No. 5, Sept. 1984, pp. 1783–1785
- [Bolte 90] E. Bolte, D. Gerling, '*Noise analysis of inverter-fed variable-speed induction motor drives*', Proceedings International Conference on Electrical Machines (ICEM), Cambridge, Massachusetts, Aug. 1990, Vol. 2, pp. 326–331

- [Brown 53] W. F. Brown, Jr., '*Magnetic energy formulas and their relation to magnetization theory*', Reviews of Modern Physics, Vol. 25, No. 1, Jan. 1953, pp. 131–135
- [Brown 66] W. F. Brown, Jr., '*Magnetoelastic Interactions*', Springer Tracts on Natural Philosophy, Vol. 9, Springer-Verlag, Berlin, 1966
- [Carpenter 60] C. J. Carpenter, '*Surface-integral methods of calculating forces on magnetized iron parts*', Proceedings IEE, Vol. 107 Part C, No. 11, 1960, pp. 19–28
- [Carter 65] G. W. Carter, '*Distribution of mechanical forces in magnetised material*', Proceedings IEE, Vol. 112, No. 9, Sept. 1965, pp. 1771–1777
- [Chikazumi 64] S. Chikazumi, '*Physics of Magnetism*', John Wiley & Sons, New York, 1964
- [Coulomb 83] J. L. Coulomb, '*A methodology for the determination of global electromagnetic quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic forces*', IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 19, No. 6, Nov. 1983, pp. 2514–2519
- [Coulomb 84] J. L. Coulomb, G. Meunier, '*Finite element implementation of virtual work principle for magnetic and electric force and torque computation*', IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 20, No. 5, Sept. 1984, pp. 1894–1896
- [DeBortoli 93] M. J. DeBortoli, S. J. Salon, D. W. Burow, C. J. Slavik, '*Effects of rotor eccentricity and parallel windings on induction machine behavior: a study using finite element analysis*', IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 29, No. 2, March 1993, pp. 1676–1682
- [Ellison 71a] A. J. Ellison, S. J. Yang, '*Effects of rotor eccentricity on acoustic noise from induction machines*', Proceedings IEE, Vol. 118, No. 1, Jan. 1971, pp. 174–184
- [Ellison 71b] A. J. Ellison, S. J. Yang, '*Natural frequencies of stators of small electrical machines*', Proceedings IEE, Vol. 118, No. 1, Jan. 1971, pp. 185–190
- [Finley 91] W. R. Finley, '*Noise in Induction Motors—Causes and Treatments*', IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 27, No. 6, Nov./Dec. 1991, pp. 1204–1213
- [Gerling 94] D. Gerling, '*The audible noise of induction machines compared for different methods of calculating the air-gap field*', Proceedings International Conference on Electrical Machines (ICEM), Paris, Sept. 1994, Vol. 3, pp. 409–414
- [Girgis 79] R. S. Girgis, S. P. Verma, '*Resonant frequencies and vibration behaviour of stators of electrical machines*', IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. 98, No. 4, July/Aug. 1979, pp. 1446–1455
- [Habetler 91] T. G. Habetler, D. M. Divan, '*Acoustic noise reduction in sinusoidal PWM drives using a random modulated carrier*', IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 6, No. 3, July 1991, pp. 356–363
- [Heemers 95] K. Heemers, '*Berekenen van elektromagnetische krachten met behulp van de eindige-elementenmethode*', afstudeerwerk, Universiteit Gent, Faculteit van de Toegepaste Wetenschappen, 1995

- [Heemers 96] K. M. M. Heemers, L. Vandevelde, J. A. A. Melkebeek, '*Local magnetic force calculation using the finite element method*', Proceedings Workshop on Electric and Magnetic Fields, Liège, May 1996, pp. 213–218
- [Henneberger 92a] G. Henneberger, Ph. K. Sattler, D. Shen, '*Nature of the equivalent magnetizing current for the force calculation*', IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 28, No. 2, March 1992, pp. 1068–1071
- [Henneberger 92b] G. Henneberger, D. Shen, W. Hadrys, S. Dappen, '*Experimental verification of the deformation in ferromagnetic materials as a result of magnetic forces*', Proceedings Workshop on Electric and Magnetic Fields, Liège, Sept. 1992, pp. 62.1–62.6
- [Hesse 92] M. H. Hesse, '*Air gap permeance in doubly-slotted asynchronous machines*', IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 7, No. 3, Sept. 1992, pp. 491–499
- [Hirsinger 95] L. Hirsinger, R. Billardon, '*Magneto-elastic finite element analysis including magnetic forces and magnetostriction effects*', IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 31, No. 3, May 1995, pp. 1877–1880
- [Javadi 95] H. Javadi, Y. Lefèvre, S. Clénet, M. Lajoie-Mazenc, '*Electro-magneto-mechanical characterizations of the vibration of magnetic origin of electrical machines*', IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 31, No. 3, May 1995, pp. 1892–1895
- [Jordan 50] H. Jordan, '*Geräuscharme Elektromotoren*', Verlag W. Girardet, Essen, 1950
- [Kabashima 88] T. Kabashima, A. Kawahara, T. Goto '*Force calculation using magnetizing current*', IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 24, No. 1, Jan. 1988, pp. 451–454
- [Lombard 93] P. Lombard, G. Meunier, '*A general purpose method for electric and magnetic combined problems for 2D, axisymmetric and transient systems*', IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 29, No. 2, March 93, pp. 1737–1740
- [Melkebeek] J. A. A. Melkebeek, '*Bouw en berekening van elektrische machines*', cursus gedoceerd aan de Universiteit Gent, Faculteit van de Toegepaste Wetenschappen
- [Müller 90] W. Müller, '*Comparison of different methods of force calculation*', IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 26, No. 2, March 1990, pp. 1058–1061
- [Oberretl 65] K. Oberretl, '*Die Oberfeldtheorie des Käfigmotors unter Berücksichtigung der durch die Ankerrückwirkung verursachten Statoroberströme und der parallelen Wicklungsweige*', Archiv für Elektrotechnik, Vol. 49, Nr. 6, 1965, pp. 343–364
- [Ostović 89] V. Ostović, '*Dynamics of saturated electric machines*', Springer-Verlag, 1989
- [Ostović 95] V. Ostović, G. Boman, '*Radial air gap force as a source of audible noise in a sinusoidally fed induction machine*', IEEE-IAS Annual Meeting, Oct. 1995, pp. 591–598

- [Pauwels] H. Pauwels, '*Velden, energie en krachten*', cursus gedoceerd aan de Universiteit Gent, Faculteit van de Toegepaste Wetenschappen
- [Ren 92a] Z. Ren, A. Razek, '*Local force computation in deformable bodies using edge elements*', IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 28, No. 2, March 1992, pp. 1212–1215
- [Ren 92b] Z. Ren, M. Besbes, S. Boukhtache, '*Calculation of local magnetic forces in magnetized materials*', Proceedings International Workshop on Electric and Magnetic Fields, Liège, Sept. 1992, pp. 64.1–64.6
- [Ren 94a] Z. Ren, A. Razek, '*A strong coupled model for analysing dynamic behaviours of non-linear electromechanical systems*', IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 30, No. 5, Sept. 1994, pp. 3252–3255
- [Ren 94b] Z. Ren, '*Comparison of different force calculation methods in 3D finite element modelling*', IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 30, No. 5, Sept. 94, pp. 3471–3474
- [Reyne 87] G. Reyne, J. C. Sabonnadière, J.L. Coulomb, P. Brissonneau, '*A survey of the main aspects of magnetic forces and mechanical behaviour of ferromagnetic materials under magnetisation*', IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 23, No. 5, Sept. 1987, pp. 3765–3767
- [Reyne 88a] G. Reyne, G. Meunier, J. F. Imhoff, E. Euxibie, '*Magnetic forces and mechanical behaviour of ferromagnetic materials, presentation and results on the theoretical, experimental and numerical approaches*', IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 24, No. 1, Jan. 1988, pp. 234–237
- [Reyne 88b] G. Reyne, J. C. Sabonnadière, J. F. Imhoff, '*Finite element modelling of electromagnetic force densities in DC machines*', IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 24, No. 6, Nov. 1988, pp. 3171–3173
- [Takahashi 86] I. Takahashi, H. Mochikawa, '*Optimum PWM waveforms of an inverter for decreasing acoustic noise of an induction motor*', IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 22, No. 5, Sept./Oct. 1986, pp. 828–834
- [Ueda 91] S. Ueda, K. Honda, T. Ikimi, M. Hombu, A. Ueda, '*Magnetic noise reduction technique for an AC motor driven by a PWM inverter*', IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 6, No. 3, July 1991, pp. 470–475
- [Vandeveldde 92] L. Vandeveldde, '*Magnetisch geluid van een invertorgevoede inductiemachine*', afstudeerwerk, Universiteit Gent, Faculteit van de Toegepaste Wetenschappen, 1992
- [Vandeveldde 94a] L. Vandeveldde, J. J. C. Gyselinck, J. A. A. Melkebeek, '*Steady-state finite element analysis in the frequency domain of squirrel-cage induction motors*', Proceedings Symposium on Power Electronics, Electrical Drives, Advanced Electrical Motors (SPEEDAM), Taormina, Italy, June. 1994, pp. 29–34

- [Vandeveld 94b] L. Vandeveld, J. A. A. Melkebeek, '*Theoretical and experimental study of radial forces in relation to magnetic noise of induction motors*', Proceedings International Conference on Electrical Machines (ICEM), Paris, Sept. 1994, Vol. 3, pp. 419–424
- [Verdyck 93] D. Verdyck, '*Mathematische Modelling van Invertorgegenereerde Statortrillingen in Elektrische Machines*', doctoraatsthesis, K.U.Leuven, 1993
- [Verhegghe] B. Verhegghe, '*Elementenmethode in de toegepaste mechanica*', cursus gedoceerd aan de Universiteit Gent, Faculteit van de Toegepaste Wetenschappen
- [Verma 90] S. P. Verma, A. Balan, '*Air-gap field harmonics and radial forces of induction motors*', Proceedings International Conference on Electrical Machines (ICEM), Cambridge, Massachusetts, Aug. 1990, Vol. 2, pp. 474–479
- [Verma 94] S. P. Verma, A. Balan, '*Determination of radial-forces in relation to noise and vibration problems of squirrel-cage induction motors*', IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 9, No. 2, June 1994, pp. 404–412
- [Wallace 90] A. K. Wallace, R. Spée, L. G. Martin, '*Current harmonics and acoustic noise in AC adjustable-speed drives*', IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 26, No.2, March/April 1990, pp. 267–273
- [Watanabe 83] S. Watanabe, S. Kenjo, K. Ide, F. Sato, M. Yamamoto, '*Natural frequencies and vibration behaviour of motor stators*', IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. 102, No. 4, April 1983, pp. 949–956
- [Willems] J. Willems, '*Dynamica van elektrische systemen*', cursus gedoceerd aan de Universiteit Gent, Faculteit van de Toegepaste Wetenschappen
- [Witczak 96] P. Witczak, '*Magnetic vibration forces in induction motors*', Proceedings Workshop on Electric and Magnetic Fields, Liège, May 1996, pp. 255–260
- [Woodson 68] H. H. Woodson, J. R. Melcher, '*Electromechanical Dynamics, Part 2: Fields, Forces and Motion*', John Wiley & Sons, New York, 1968
- [Yacamini 95] R. Yacamini, S. C. Chang, '*Noise and vibration from induction machines fed from harmonic sources*', IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 10, No. 2, June 1995, pp. 286–292
- [Yang 81] S. J. Yang, '*Low-Noise Electrical Motors*', Clarendon Press, Oxford, 1981
- [Zhu 94] Z. Q. Zhu, D. Howe, '*Improved methods for prediction of electromagnetic noise radiated by electrical machines*', IEE Proceedings Electrical Power Applications, Vol. 141, No. 2, March 1994, pp. 109–120